SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATVS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS PRIOR
COMPLECTENS
THEORIAM VNIVERSAM
DE SITV AC MOTV
CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

---

*INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.*

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
cIↄ Iↄccxlix.

EXCELLENTISSIMO ATQVE ILLVSTRISSIMO
ACADEMIAE PRAESIDI

CYRILLO GREGORII F.
COMITI DE RASVMOVSKI

SACRAE IMPERATORIAE
MAIESTATIS
CVBICVLO PRAEFECTO,
COHORTIS PRAETORIAE ISMAILOVENSIS
PROTRIBVNO,
ORDINVM EQVESTRIVM AQVILAE ALBAE,
S. ALEXANDRI ET S. ANNAE
EQVITI.

ILLVSTRISSIME COMES

DOMINE GRATIOSISSIME!

NAuigationis Scientia iam pridem inter mathematicas disciplinas referri eſt coepta, vbi quidem Hydrographiae nomine occurrere ſolet. Hic ſcilicet imprimis ratio mapparum nauticarum exponitur, vna cum doctrina de rhumbis lineisque loxodromicis, vnde regulae vtiliſſimae eliciuntur curſum nauium ita dirigendi, vt ad locum propoſitum aduehantur: quorſum quoque pertinent

nent inſtructiones naucleris tradi ſolitae, quibus ad latitudinem loci, vbi verſatur ex altitudinibus ſolis vel ſtellarum definiendam, curſumque nauis aeſtimandum inſtituuntur. Verum haec nauigationis pars ita accurate paſſim eſt tractata, vt in hoc opere, quod Tuis, *Comes Illuſtriſſime* auſpiciis in lucem producitur, eam attingere plane ſuperfluum fuiſſet.

Hic enim longe aliud inſtitutum perſequi eſt viſum, quod in re nauali non minus maximi eſt momenti, et quod adhuc parciſſime eſt tractatum. Namque in praeſenti opere non tam ad curſus, quem nauis tenere debet, directionem reſpicio quam ad ipſam nauium fabricam et exſtructionem, vt ad eum finem, cui ſunt deſtinatae, maxime ſint accommodatae. Quae tractatio vt commode ſuſcipi queat, ante omnia neceſſe eſt, vt quemadmodum quaeuis nauis in omni ſtatu, cui exponitur, ſeſe ſit habitura, diligenter inueſtigetur. Duo autem hic

prae-

praecipue ſe offerunt ſtatus, in quibus nauis eſt conſideranda, alter quietis alter motus, in quorum vtroque plurima occurunt notanda, ſine quibus indoles nauium omnino perfecte cognoſci nequit, et quae plerumque profundiſſimas analyſeos inueſtigationes requirunt. Primum igitur nauem in ſtatu quietis examini ſubiicere conuenit, dum ſine motu aquae inſidit ſeque ad ſtatum aequilibrii compoſuit. Certum itaque nauis in aqua tenebit ſitum, cuius ratio ex praeceptis hydroſtaticae eſt explicanda; vnde conſtat tantam nauis partem aquae immergi, donec aequalis aquae moles totius nauis pondus adaequet, ex quo ſtatim elicitur modus facilis pondus cuiusque nauis explorandi: menſuretur enim ſecundum praecepta ſtereometrica capacitas partis nauis aquae ſubmerſae, et calculo definiatur quantum pondus habiturum ſit aequale aquae volumen, quod ipſi nauis ponderi erit aequale. Verum ad hoc, vt nauis

vis in aequilibrio ſubſiſtat, non ſufficit partem eius ſubmerſam tantae eſſe capacitatis, ſed alia praeterea requiritur conditio, ad quam intelligendam duo puncta ſunt notanda, quorum alterum eſt centrum gravitatis totius nauis, alterum vero centrum grauitatis partis ſubmerſae, quod haec pars eſſet habitura, ſi tota ex materia vniformi veluti aqua conſtaret; hocque poſterius punctum, quia tantum a magnitudine pendet, centrum magnitudinis partis ſubmerſae appello. Iam vt nauis in aequilibrio perſiſtat, praeter illam determinatam partis ſubmerſae quantitatem requiritur, vt ambo haec centra, alterum grauitatis totius nauis, alterum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem lineam rectam perpendicularem ſeu verticalem cadant. His duabus proprietatibus ſitus aequilibrii ita perfecte determinatur, vt viciſſim aſſeuerare liceat, quoties tanta nauis pars, quantam ante diximus, aquae fuerit immerſa, ſimulque

am-

ambo illa centra in eadem linea recta verticali reperiantur, toties nauim in aequilibrio esse futuram. Veritas huius propositionis ex primis mechanicae principiis euincitur: primo enim spectanda est vis, qua nauis deorsum vrgetur, quae ipsius ponderi est aequalis, cuiusque directio est recta verticalis per eius centrum grauitatis transiens; hac scilicet vi nauis re ipsa deorsum laberetur, nisi ab aqua sustentaretur. Qua autem parte navis aquae est submersa, ibi ab aqua sursum vrgetur, atque tota vis aquae hinc oriunda, qua nauis sursum pellitur, aequalis est ponderi massae aquae, cuius volumen parti nauis submersae aequatur, eiusque directio est recta verticalis per centrum magnitudinis huius partis submersae transiens. Cum igitur ad aequilibrium requiratur, vt hae duae vires sint inter se aequales et directe contrariae, manifestum est hoc euenire, si primo tanta nauis pars aquae immergatur, quae volumine adaequet mas-

maſſam aqueam toti naui pondere aequalem: tum vero ambo illa ante deſcripta centra in eandem rectam verticalem incidant: per prius enim efficitur, vt duae illae vires, quibus nauis vrgetur, fiant inter ſe aequales, per poſterius autem, vt ſibi e diametro fiant contrariae. Atque haec ſunt fere, quae iam ab Archimedis temporibus de ratione ſitus aequilibrii corporum aquae inſidentium fuerunt cognita, quae etſi in nauium doctrina maximae ſunt vtilitatis, tamen ad eam ſitus aequilibrii cognitionem, quae in nauibus potiſſimum deſideratur, minime eſt ſufficiens. Cum enim nauis a fluctibus aliisque cauſis continuo de ſitu aequilibrii deturbetur, plurimum intereſt noſſe vtrum ſeſe ſponte eo reſtituat nec ne? atque imprimis requiritur, vt quanta vi haec reſtitutio fiat, accurate definiatur. Quae quo clarius perſpiciantur, ſimiles caſus in corporibus ſolidis perpendiſſe iuvabit. Conus baſi ſua tabulae inſiſtens

non

non ſolum in ſitu ſuo permanet, ſed etiam ſi parumper inclinetur, ſponte ſe erigit; verum etiam fieri poteſt vt idem conus tabulae cuspide impoſitus aequilibrium teneat, at ſimulac vel leuiter tangatur, prolabetur. Vtroque quidem caſu conus in aequilibrio ſtare dicitur, verum inter hos duos ſtatus aequilibrii maximum discrimen intercedit, dum prior ſtabilitate eſt praeditus, alter autem ad labendum ſit procliuis. Simile omnino diſcrimen locum habet in corporibus, quae aquae incumbunt, alia enim ſtatum ſuum aequilibrii ita firmiter tenent, vt etiamſi inde declinentur, tamen continuo eo reuertantur: alia vero, veluti ſi baculus aquae perpendiculariter immittatur, quo ſitu in ſumma quidem tranquillitate perſiſtere poſſet, a minima vi prolabuntur. Hinc igitur grauiſſimum oritur diſcrimen inter varios aequilibrii ſtatus, ex quo alii ſtabiles alii vero labiles vocantur: corporis ſcilicet aquae

insidentis status aequilibrii erit stabilis, si corpus statim ac paulisper inclinetur, sese in eundem situm restituat; contra vero si corpus post quampiam inclinationem procumbat, eius aequilibrii situs labilis dicitur. Etsi igitur vtrique huic aequilibrii generi ambae supra memoratae proprietates sunt communes, tamen sua natura tantopere inter se discrepant, vt, cum de nauibus agitur ad hoc discrimen sit potissimum attendendum. Non solum enim naues huius indolis esse oportet, vt aquae situ erecto immissae aequilibrium seruent, sed etiam vel maxime vt iste aequilibrii situs sit stabilis, nauesque, vbi fuerint inclinatae, vi sese in situm erectum restituendi sint praeditae. Deinde etiam hi ipsi aequilibrii stabiles status plurimum inter se quantitate differunt, prouti in aliis restitutio promtius in aliis lentius absoluitur, ex quo eiusmodi stabilitatis notionem adipiscimur, qua eam ad determinatas mensuras revocari debere

bere intelligimus: atque hinc concludimus, vt cuiusque nauis ſtatus aequilibrii maxime ſit ſtabilis, ita eam reliquis maxime praeſtare. Verum ex characteribus ante expoſitis, quibus aequilibrii ſitus continetur, minime diiudicare licet, vtrum propoſitus aequilibrii ſitus nauis aquae inſidentis ſtabilis ſit futurus nec ne? multo minus inde ipſe ſtabilitatis gradus definiri poterit; quae tamen res in ſcientia nauali ita eſt maximi momenti, vt ſine ea nauigatio nullo modo tuta eſſe queat. Architecti quidem nauales longa experientia edocti ita naues fabricari didicerunt, vt plerumque ſufficienti ſtabilitatis gradu ſint praeditae, etiamſi nonnunquam in hoc ipſo non leuiter decipiantur; verum tamen ne per experirientiam quidem eas res enumerare, et accurate definire valent, quibus naui ſtabilitas conciliatur. Hunc defectum in architectura nauali ſummi momenti primus accuratius perſpexiſſe videtur vir Gallus

in hoc negotio verſatiſſimus Dominus de la Croix, qui in duobus opuſculis, quae circa annum 1736 *de mechanismo motus corporum aquae inſidentium* cum Academia Scientiarum Imperiali communicauit, non ſolum hunc defectum luculenter indicavit, ſed etiam eundem ſupplere pro viribus eſt conatus. Quanquam autem ſpeculationes, quas in hunc finem expoſuit, negotium minime conficere ſtatim ſunt viſae: tamen dignitatem huius argumenti tam dilucide demonſtrauit, vt ab eo tempore omnibus viribus in eo euoluendo laboraverim. Primum igitur ea mechanicae principia, quibus ſtabilitatis determinationem inniti perſpexeram, diligentius ſum perſcrutatus, indeque mox quicquid ad hanc rem pertinere videbatur, feliciter ſum aſſecutus. Ad hoc autem problema totam hanc disquiſitionem perduxeram, vt propoſita vi, quae navem de ſuo aequilibrii ſitu inclinare conatur, angulum definirem, ad quem na-

vis

vis reuera inclinari debeat. Hic quidem primo ratio erat habenda illius axis, circa quem inclinatio ſit futura, aliam enim inclinationem produci debere manifeſtum eſt, ſi nauis proram puppimue verſus ſit inclinanda, aliam, ſi ad alterutrum latus, vel in aliam quamuis regionem obliquam: deinde quoque perſpicuum eſt effectum inclinationis non tam pendere a quantitate vis inclinantis, quam ab eius momento, ad illum axem, circa quem fit inclinatio, vel potius ad axem huic parallelum per nauis centrum grauitatis transeuntem applicato. Quibus notatis inueni inclinationem partim a diſtantia centrorum grauitatis nauis et magnitudinis partis ſubmerſae pendere, partim ab amplitudine eius nauis ſectionis, quae ſecundum aquae ſuperficiem ſit facta. Tum vero intellexi, quamdiu inclinationes ſint ſatis exiguae, eas ceteris paribus ipſis vis inclinantis momentis eſſe proportionales. Quare cum ſtabilitas eo maior cenſeri de-

 beat,

beat, quo minus nauis a data vi inclinetur, vel quo maior vis requiratur ad datam inclinationem naui inducendam, ſtabilitatem eiusmodi quantitate expreſſi, vt ſi momentum vis inclinantis per eam diuidatur, quotus ipſum angulum inclinationis ſit indicaturus: hocque modo ſtabilitatis menſura mihi eſt quantitas virium momentis homogenea, ideoque productum ex vi quadam in lineam quandam rectam. Ad hunc ergo modum ſi cognita fuerit ſtabilitas nauis pro quocunque axe, circa quem inclinatio efficitur, ex ea ſtatim ipſa inclinatio, quae naui a quacunque vi data inducetur cognoſci poterit, haecque ſine dubio eſt maxime naturalis, atque ad vſum aptiſſima ratio ſtabilitatem cuiusque navis aeſtimandi. Cum autem ſtabilitas ad inclinationem referatur, nauis autem potiſſimum vel ſecundum longitudinem vel latitudinem inclinationem patiatur, duplex ſtabilitas in omni naui praecipue

eſt

eſt conſideranda, quarum altera inclinationi ſecundum longitudinem, altera vero inclinationi ad latera reſiſtit: duplici vero hac ſtabilitate cognita regulam elicui, cuius ope ſtabilitas nauis reſpectu vniuscuiusque inclinationis mediae obliquae definiri poteſt. Vnde cum cuiusque nauis longitudo latitudinem multum ſuperare ſoleat, hoc meminiſſe iuuabit, in qualibet naui ſtabilitatem ſecundum longitudinem eſſe maximam. Stabilitatem vero ſecundum latitudinem minimam, ſeu naves proram puppimue verſus difficillime, ad alterutrum latus vero facillime inclinari. Ex formulis igitur, quas pro ſtabilitate nauium exhibui a priori cognoſcere licet, quantum quaeuis nauis a datis viribus inclinari debeat, vnde ſi a viribus, quibus nauis exponitur, maior inclinatio produci deprehendatur, quam nauis ſine damno pati queat, hoc incommodum in tempore praecaueri poterit, propterea quod dilucide expoſui, quibus rebus ſtabili-

bilitas nauis augeri queat. Tribus autem hoc modis effici poſſe oſtendi: primo enim ſi totius nauis centrum grauitatis in humiliorem locum deprimatur, quod fit grauioribus oneribus in profundiora loca translocandis, ſtabilitas nauis augetur, deinde idem effectus obtinetur, ſi partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſurſum eleuetur, de quo in ipſa nauium conſtructione eſt proſpiciendum, ne navis nimis profunde aquae immergatur. Tertium remedium nauis ſtabilitatem augendi in amplitudine nauis ad aquae ſuperficiem eſt poſitum, ita vt quo amplior nauis in hac regione efficiatur, eo maior eius ſtabilitas euadat. Ita ſi nauis inclinationi ad latera non ſatis reſiſtat, nauim ſecundum latitudinem ampliorem effici conueniet, quod nauim nouis parietibus obducendo fieri ſolet.

Cum igitur hanc de ſtabilitate doctrinam accurate eſſem perſecutus, cum ea vniuerſam ſcientiam naualem tam ar-

ctis

ctis vinculis connexam ſenſi, vt non ſolum ſine hac doctrina nihil plane in hac ſcientia praeſtari poſſe intelligerem, ſed etiam ea ſtabilita viam ad reliquas huius ſcientiae partes pertractandas patefactam viderem. Conſilium itaque cepi primaria difficultate feliciter ſuperata totam hanc diſciplinam naualem omni ſtudio euoluendi, atque ad certam ſcientiae formam reuocandi, vnde iſtud opus eſt natum. Cum igitur explorare conſtituiſſem, quemadmodum nauis antequam ad curſum incitatur, in ſtatu quietis ſe ſit habitura, expoſita ſtabilitatis theoria ipſas inclinationes, quae naui a quibuscunque cauſis inducuntur, accuratius ſum contemplatus, motusque quibus nauis ex ſitu inclinato in ſitum aequilibrii ſe recipit, ſum perſecuratus. Hos motus ad ſimilitudinem oſcillationum penduli abſolui debere comperi motumque iſtum oſcillatorium, qui vel ſecundum longitudinem nauis fieri ſolet, vel ſecundum la-

titudinem, ita per calculum determinaui, vt quouis casu longitudinem penduli simplicis assignauerim, quod aequis temporis interuallis suas oscillationes perageret. Non exigui est momenti haec inuestigatio in scientia nauali, cum in nauigatione non solum plurimum intersit hunc motum oscillatorium nosse, quibusque rebus intendi remmittiue queat, perspectum habuisse, sed etiam obseruata duratione harum oscillationum, plura momenta ad nauim pertinentia inde cognosci possunt, quorum notitia ad reliquas nauium proprietates indagandas maxima subsidia affert.

His expositis ad cursum nauium examinandum sum progressus, vbi primum resistentia, quam nauis ab aqua patitur, inuestiganda occurrit. Quod argumentum etsi iam ab aliis satis accurate est pertractatum, tamen ad meum institutum data opera ex primis principiis explicare est visum, vbi praecipue ad duplicem

na-

nauis motum reſpexi; quorum alter curſus nauis directus vocari ſolet, quo navis ſecundum longitudinem ſeu directionem ſpinae promouetur, alter vero curſus vocatur obliquus, quo directio motus differt a directione ſpinae, ſeu lineae rectae a puppi ad proram productae: curſum autem obliquum naues vento propulſae potiſſimum ſequuntur, cum vela ad ventum excipiendum oblique expanduntur. Vtroque curſu reſiſtentia aquae a figura nauis anteriori pendet, qua contra aquam impingit, et cum vis reſiſtentiae ad ſingula ſuperficiei nauis puncta ſit perpendicularis, totam reſiſtentiae vim ad ternas vires reuocaui, quarum primae directio eſt horizontalis, et ſpinae nauis parallela, alterius directio quoque horizontalis et ad illam normalis, quae tantum in curſu obliquo locum habet, dum in directo euaneſcit, tertiae denique vis ex reſiſtentia reſultantis directio eſt verticalis, qua nauis ſurſum vrgetur. Hoc lo-

co regulas tradidi, quarum ope, ſi cognita fuerit figura partis nauis anterioris, ſingulae hae tres vires a reſiſtentia oriundae definiri queant, quas ceteris paribus quadrato velocitatis, qua nauis in aqua promouetur, proportionales eſſe conſtat. Iam igitur eo erat peruentum, vt qualem effectum hae tres vires in nauim exerant, eſſet inquirendum quae indagatio quo latius pateret, indeque ſimul omnium virium, quibus nauis in omni ſtatu ſollicitetur, effectus colligi queant, hoc argumentum copioſius omni cura pertractaui. Cuius ratio quo facilius perſpici queat, ante omnia notandum eſt, omnes motus, qui in naui ineſſe poſſunt, ad duo genera referri debere. Prioris generis motus vocatur progreſſiuus, quo tota nauis ſimul ita promouetur, vt eius ſitus ſibi perpetuo maneat parallelus, cuiusmodi motus duplex in nauim cadere poteſt alter ſecundum directionem horizontalem, alter ſecundum verticalem, quorum

rum ille quidem praecipue ſpectatur, ac prout ſiue ſecundum nauis directionem fiat, ſiue ab ea declinet, vel curſus directus appellari ſolet vel obliquus: motus autem verticalis, quo nauis vel ex aqua magis extollitur, profundiusue immergitur, rariſſime occurrit, ideoque vix attingi meretur. Poſterius genus complectitur motus gyratorios vel rotatorios, quibus nauis circa quempiam axem per eius centrum grauitatis transeuntem conuertitur; hique motus vel ſeorſim in naui ineſſe poſſunt ſine motu progreſſiuo, vel coniunctim cum motu progreſſiuo. Plures autem ſpecies huiusmodi motuum ſunt notandae pro diuerſitate axium, circa quos fit motus gyratorius, imprimis vero hic diſtinguendi ſunt axes horizontales ab axe verticali, ſi enim nauis circa axem quempiam obliquum vertatur vel inclinetur, eius motus reſolui poteſt in duos, quorum alter circa axem horizontalem fiat, alter circa verticalem. Simili-

li quoque modo omnes axes horizontales ad duos reuocantur; quorum alter ſecundum longitudinem nauis, alter ſecundum latitudinem per centrum grauitatis traiicitur; motus enim, qui circa alium axem horizontalem fieret, in hos duos reſoluere liceret. Hinc igitur triplex motus gyratorius exiſtit, quorum primus fit circa axem longitudinalem, quo nauis ad alterutrum latus inclinatur: ſecundus fit circa axem latitudinalem, eoque nauis vel proram verſus vel puppim verſus inclinatur: vtroque non tam motum, quo inclinatio efficitur, quam ipſam inclinationem, quae naui a quibuscunque viribus inducitur, inueſtigari conuenit, quoniam iſte effectus ſtatim producitur, parumque intereſt noſſe, quonam motu is fuerit productus; ob ſtabilitatem enim nauis motus ſtatim ceſſat, et nauis in ea inclinatione, cui efficiendae vires inclinantes pares fuerint, perſiſtit. Aliter autem eſt comparata ratio tertii motus rotato-

tatorii, qui ſit circa axem nauis verticalem, quo tota nauis in gyrum agitur, et qui tamdiu durat, quamdiu nauis a viribus tali motui producendo paribus ſollicitatur, huc imprimis pertinet motus, qui naui a gubernaculo induci ſolet, verum etiam de reliquis viribus, quibus nauis vrgetur, plurimum intereſt eas contemplari quae naui ſimilem motum imprimere valeant. Cum igitur nauis a viribus quibuscunque fuerit ſollicitata, praecepta dedi ac dilucide expoſui, quorum ope omnes motus et inclinationes ab illis viribus oriundae facili opera dignoſci et determinari queant. Quod enim primo ad motum progreſſiuum attinet, omnes vires, quibus nauis ſollicitatur ſecundum ſuas quaeque directiones in ipſum centrum grauitatis ſunt tranferendae, omnesque ſecundum ſtaticae praecepta in vnam colligendae vel in duas quarum alterius directio ſit horizontalis alterius verticalis, haec poſterior eundem praeſtabit

ſtabit effectum, prout vel ſurſum agat vel deorſum ac ſi pondus nauis tantumdem ſiue decrementum ſiue augmentum accepiſſet; nauisque proinde vel ex aqua magis eleuabitur, vel magis immergetur. Ex horizontali autem vi verus na, vis motus progreſſiuus ita definietur ſecundum praecepta mechanica, vt vis haec per maſſam ſeu pondus totius nauis diuiſa praebeat accelerationem motus ſecundum eam directionem, in quam vis vrget; vnde ſi huius vis directio, motus, quem nauis iam habet, directioni ſit vel ſecunda vel aduerſa vel obliqua, motus nauis vel acceleratio vel retardatio vel inflexio definiri, ideoque motus continuatio determinari poterit. Ad inclinationem nauis ab iisdem viribus oriundam et primo quidem circa axem longitudinalem inueniendam, ſingularum virium momenta reſpectu huius axis in vnam ſummam colligantur, quae per ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem

dem axis diuiſa praebebit angulum inclinationis, arcum ſcilicet, qui eius exiſtit menſura in circulo, cuius radius vnitati aequalis aſſumitur: ſimilique modo inclinatio circa axem latitudinalem elicitur. Pro motu gyratorio nauis circa axem verticalem per eius centrum grauitatis ductum, pariter ſingularum virium momenta reſpectu huius axis colligantur, haecque momentorum ſumma per momentum inertiae totius nauis reſpectu eiusdem axis diuiſa dabit accelerationem motus huius gyratorii. Momentum autem inertiae nauis reſpectu cuiuspiam axis voco id aggregatum, quod inuenitur, ſi ſingulae nauis partes ratione ſui ponderis per quadrata diſtantiarum ſuarum ab eo axe multiplicentur, haecque producta omnia in vnam ſummam coniiciantur. His poſitis a reſiſtentia primum motus nauis impeditur, qui eſt praecipuus eius effectus, a quo nomen inuenit, deinde a vi verticali ex reſiſtentia

resultante nauis ex aqua parumper attollitur et quasi leuior redditur tum vero plerumque puppim versus reclinatur, atque in cursu obliquo etiam tam inclinatio circa axem longitudinalem seu ad latera, quam conuersio circa axem verticalem inde oriri potest, qui effectus quemadmodum quouis casu se habeant, distincte exposui. Verum vis resistentiae non seorsum sed cum omnibus viribus, quibus nauis impellitur coniunctim considerari debet, vt inde veri nauis motus colligi queant. Hancobrem vires, quibus vulgo naues propelli solent, in computum erant ducendae, quae duplicis potissimum sunt generis, vires scilicet venti et vires remorum, de quorum vtroque genere seorsim erat agendum. Primum igitur naues, quae per ventum velorum ope propelluntur, ad examen reuocaui hique iis, quae de vi venti in genere erant notanda, praemissis, quantam vim quodque velum a vento excipiat, accu-

ratius determinaui , quo loco ſimul curvatura , quae velis a vento imprimitur, definienda occurrit , quoniam ab ea quoque quantitas vis exceptae pendet. Tum vero ad malos ſum progreſſus , ex quorum numero et ſitu tam quantitas omnium virium a vento exceptarum, quam earum directio colligi debet , vbi iterum duo caſus ſunt perpendendi , alter quo directio vis a vento exceptae directioni nauis eſt parallela , quo caſu curſus nauis directus inſtituitur ; alter vero, quo directio illa ab hac declinat , vnde curſus obliquitas exiſtit. In curſu igitur directo , quem priori loco euoluere conuenit , vela ad directionem nauis normaliter ſunt expanſa , vbi ante omnia ad angulum ſub quo ventus in vela irruit , eſt reſpiciendum , quoniam ab obliquitate incidentiae non ſolum vis venti imminuitur , ſed etiam dum nauis prouehitur , ex compoſitione veri motus venti et nauis cum alia vis venti in vela tum

alia directio exoritur. Vi autem venti hoc modo pro curſu directo determinata, duplex inde effectus in nauim redundat, alter quo nauis propellitur, et eo vsque propellitur, quoad reſiſtentia ipſi vi propellenti fiat aequalis, nauisque tum motu vniformi prouehatur; qui ſtatus aequalitatis, cum mox eueniat, ex vi propellente cum reſiſtentia comparata ſtatim celeritas nauis, qua vniformiter progredietur, colligi poteſt.

Praeterea vero vis venti momentum afferet ad nauim antrorſum inclinandam, dum contra ex reſiſtentia oritur vis ad nauim retrorſum inclinandam, quare ſi hae duae vires fuerint aequales, nauis nullam inclinationem ſubibit. Illud autem momentum praecipue pendet ab altitudine malorum, quo enim altius vela expanduntur, eo maius inde reſultat momentum ad nauem inclinandam: dum ratione motus progreſſiui perinde eſt, ſiue vela altius ſiue humilius ſint expan-

ſa,

ſa, dummodo eandem vim a vento excipiant. Hinc igitur altitudo malorum ita definiri poteſt, vt ab actione venti naui nulla inclinatio inducatur: verum haec, quae ad malos attinet, atque diſpoſitionem velorum, ex contemplatione curſus obliqui potiſſimum ſunt determinanda.

Curſus autem obliquus, vt iam notavimus, exiſtit ſi vela non normaliter ad nauis directionem expanduntur, ita vt media directio omnium virium a vento exceptarum a nauis directione declinet. Secundum hanc ergo mediam directionem nauis primum propelletur, ſed in eadem directione motum non proſequetur, propterea quod vis reſiſtentiae hoc modo vi propellenti nunquam aequalis et directe contraria fieri poſſet, Statim enim atque nauis oblique fertur, quoniam alterutrum latus in aquam impingit, reſiſtentia lateralis mox fit perquam magna prae reſiſtentia, quae ſecundum na-

vis directionem agit; vnde in quouis motu obliquo directio resistentiae multo magis a directione nauis declinat, quam ipsa directio motus: sic verbi gratia euenire potest, vt, dum directio cursus a directione nauis tantum angulo 10° declinat, directio resistentiae inde 30° declinare possit. Ex quo perspicuum est si directio vis propellentis fuerit obliqua, obliquitatem cursus eiusmodi fore, vt media directio resistentiae fiat directioni vis propellentis contraria. Sic in casu modo memorato, si directio vis propellentis cum directione nauis faciat angulum 30°, cursus nauis tantum 10° a directione nauis declinabit, quia ex hoc cursu resistentia nascitur, cuius directio 30° declinans fit directioni vis propellentis contraria; nauis autem tantam celeritatem adipiscetur, vt vis resistentiae vi propellenti etiam quantitate aequalis euadat; ex quo non solum obliquitatem cursus sed etiam eius celeritatem determina-

re

re licebit. Ex hoc autem diſcrimine inter directiones vis propellentis et ipſius curſus maximum commodum in nauigatione obtinetur quod curſus eam regionem verſus, vnde ventus ſpirat, inſtitui queat; ita ſcilicet, vt vento flante borea, curſus nauis vltra ortum vel occaſum boream verſus dirigi poſſit; atque naues eo praeſtantiores cenſeri ſolent, quo propius ad venti regionem contendere valent. Pendet igitur haec inſignis virtus potiſſimum a reſiſtentia laterali prae reſiſtentia directa, ita vt quo magis reſiſtentia lateralis augeatur, vel reſiſtentia directa minuatur, eo propius nauis aduerſus ventum conari valeat: ceteris autem paribus, naues quo fuerint longiores, eo magis hac praerogatiua gaudebunt.

Ex vi autem venti in curſu obliquo momenta naſcuntur ad motus naui circa omnes tres axes ante memoratos imprimendos. Primo enim vti in curſu directo nauis proram verſus deprimitur, niſi

ſi quatenus hic effectus a reſiſtentia aquae impeditur vel ſaltem diminuitur. Cum autem ſtabilitas nauis, qua huic inclinanationi reluctatur, ſit maxima, nulla hinc tanta inclinatio oriri poteſt, quae eſſet metuenda, neque igitur ex hoc capite copia velorum neque malorum altitudo reſtringitur. Verum cum in curſu admodum obliquo vela fere ſecundum navis longitudinem explicentur, directio vis a vento exceptae propemodum ad directionem nauis fit normalis, vnde maximum oritur momentum ad nauem in latus ſeu circa axem longitudinalem inclinandam, quod momentum eo erit maius, quo altiores fuerint mali, neque hoc caſu vis reſiſtentiae multum iſtam inclinationem diminuere valebit. Quare cum ſtabilitas nauis reſpectu huius axis ſit minima, ſeu inclinationi minime reſiſtit, hinc in curſu obliquo admodum notabilem inclinationem ad latus oriri neceſſe eſt, vnde nauis facile in ſummum dis-

cri-

crimen incidere possit, si vel vis a vento excepta fuerit nimis magna, vel nimis alte applicata. Atque hinc, cum velorum amplitudo per nauis capacitatem determinetur, eorum altitudo quoque ac proinde altitudo malorum definitur, quae maior esse non debet, quam vt nauis inclinationem inde in cursu obliquo oriundam sine periculo sustinere queat.

Praeterea vero etiam in cursu obliquo euenire potest, vt a vi venti nauis ad motum gyratorium circa axem verticalem incitetur, cum qua vi coniungenda est ea, quae ad similem effectum producendum ex resistentia nascitur, ac nisi vel vtraque haec vis euanescat, vel ambae se mutuo destruant, maximo inde vitio naues afficiuntur. Ne enim hoc casu nauis actu in gyrum agatur, actione gubernaculi est prouidendum, quae etiam saepenumero huic effectui compescendo impar esse solet, vt taceam tam continua gubernaculi actione cursum nauis non

mediocriter impediri. Quae naues hoc vitio laborant, eae regimen gubernaculi respuere dicuntur, quod merito inter summa nauium incommoda numeratur: imprimis ergo in fabrica nauium in id est incumbendum, vt hoc vitium euitetur, quod idonea malorum collocatione effici poterit. Namque vt naui a viribus sollicitantibus nullus motus gyratorius circa axem verticalem, qui per centrum grauitatis nauis ductus concipitur, imprimatur, necesse est vt media directio omnium virium per ipsum hunc axem transeat, tum enim momentum harum virium respectu huius axis sumtum euanescet. Quamobrem malos in quaque naui ita collocari oportet, vt omnibus velis expansis cunctarum virium, quae ipsis a vento imprimuntur, media directio per axem illum verticalem transeat, seu vt planum verticale, quod per mediam virium directionem ductum intelligitur, simul per nauis centrum grauitatis trans-

eat.

eat. Hoc ſcilicet tenendum eſt, ſi media directio virium reſiſtentiae iam ſponte per iſtum axem tranſit, ſin autem hoc ſecus eueniat, etiam malorum collocatio modo tradita tantum immutari debet, vt momentum virium venti cum momento virium reſiſtentiae in aequilibrio conſiſtat. Quotcunque enim fuerint mali, ſemper eorum loco vnus concipi poteſt, qui aequali velorum copia onuſtus eundem producat effectum; huiusque mali locus per praecepta expoſita determinatur: atque hinc porro ſingulorum malorum loca, et altitudines definiuntur, ſi interuallorum, quibus inter ſe ob latitudinem velorum diſtare debent ratio habeatur, ne vela poſteriora anterioribus ventum penitus praeripiant. In praxi quidem vix vnquam haec aptiſſima malorum conſtitutio obtineri poſſe videtur, vt gyratio nauis plane euitetur, poſtremus enim malus in puppi poſitus, et velo plerumque triangulari inſtru-

ſtructus, ad hoc vt plurimum adhiberi ſolet, vt vis venti ab eo excepta non tam ad nauem propellendam, quam ad eam gubernandam, vireſque reliquas, quae nauem in gyrum agere conantur, deſtruendas impendatur, quo pacto nauis non exiguam vis propellentis iacturam patitur, ſimulque eius facultas aduerſus ventum nauigandi non mediocriter impeditur. In hoc ergo capite, quod fuſius ſum proſecutus, omnia diligentiſſime determinaui, quae ad locum, numerum, et altitudinem malorum pertinere videbantur.

In doctrina porro de curſu obliquo multa alia occurunt, quae non parum vtilitatis ad praxin afferre videntur. Propoſita enim curſus, quem nauis tenere debet, directione, niſi ea nimis prope ad regionem venti dirigatur, pluribus imo infinitis modis vela ita diſponi poſſunt, vt nauis eum curſum ſequatur; ex omnibus igitur eum determinaui,

quo

quo naui motus celerrimus imprimeretur, quae determinatio vſu non carebit, etſi nautae quotidiana experientia edocti hanc aptiſſimam velorum diſpoſitionem iam ſatis accurate eligere norint. Quando autem aduerſus ventum eſt nitendum, eam tam nauis quam velorum directionem aſſignaui, qua contra ventum maximum lucrum impetretur, ad quod commodum nautae maxime reſpicere ſolent.

Expenſis viribus venti et reſiſtentiae, quibus nauis vrgetur, ſupereſt vt actio gubernaculi ad examen reuocetur, quod puppi annecti ſolet. Hic primum corpus nauis puppim verſus ita eſt attenuandum, vt aqua ſatis libere in gubernaculum impingere, ſicque effectum deſideratum producere valeat. Ad ipſam vero gubernaculi actionem explicandam, eius primo vis, quae gubernaculo imprimitur, momentum reſpectu axis per nauis centrum grauitatis traducti eſt colligendum, quod per

momentum inertiae nauis reſpectu eiusdem axis diuiſum praebebit accelerationem, qua nauis conuertetur. Hinc patet, cum gubernaculum puppi annexum a centro grauitatis maxime diſtet, eius actionem eſſe maximam, ſimulque ex momento inertiae nauis cognito, ipſa gubernaculi magnitudo ita facile definitur, vt eum, qui requiritur, effectum exhibeat.

His rebus expeditis non erit difficile omnium nauium, ad quamcunque normam ſint extructae, commoda atque incommoda perſpicere ac determinare: quin etiam id, in quo ſumma ſcientiae naualis verſatur, praeſtari poterit, vt propoſito ſcopo, cui nauis deſtinatur, aptiſſima ac proinde perfectiſſima nauis conſtrui queat. Primum enim explicatum eſt, quomodo nauem comparatam eſſe oporteat, vt datum ſtabilitatis gradum tam reſpectu axis longitudinalis quam latitudinalis conſequatur, tum etiam oscil-

cillationes et agitationes ab impulſu fluctuum oriundae, ad libitum attemperari poterunt. Tertio prolixe expoſui, quomodo proram nauis conformatam eſſe oporteat, vt pro ratione cuiusque instituti minimam reſiſtentiam patiatur, ſicque nauis quam celerrime prouehi queat. Quarto eam nauis figuram deſcripſi, quae ad curſum contra ventum instituendum ita ſit accomodata, vti fuerit praeſcriptum; et quae ſimul facillime actioni gubernaculi obtemperet, ſexto quoque locum, numerum et altitudinem malorum itemque velorum copiam ita aſſignaui, vt tam in curſu directo, quam obliquo nauigatio optimo ſucceſſu institui queat. Fieri quidem poteſt, vt plura requiſita diuerſam nauium structuram poſtulent, et quaſi inter ſe pugnare videantur, verum perſpectis omnibus, quae ad quodque requiſitum pertinent, rationibus, non difficile erit quouis caſu diverſas concluſiones inter ſe conciliare,

om-

omnibusque requiſitis coniunctim ſumtis tantum ſatisfacere, quantum rei natura permittit.

Alterum nauium genus, quae remis propelluntur, non leuiores inueſtigationes requirit; poſtquam enim iam Ariſtoteles vim remorum ex natura vectis infelici cum ſucceſſu explicare eſt conatus, recentiores mathematici eius quidem errorem agnouerunt, ſed nemo hoc negotium pro dignitate expediuit. Operam igitur dedi, vt eam vim, qua nauis per remos ſollicitatur, ex ipſis primis mechanicae principiis eruerem, atque celeritatem, quam remi quotcunque et viribus quibuscunque agitati naui imprimere valeant accurate definiui. Quoniam huiusmodi naues nunquam velis aduerſus ventum contendunt, ſicque inclinationi, quae in curſu obliquo exiſtit, non ſunt obnoxiae, in hoc tantum erit elaborandum, vt cum ſufficienti ſtabilitatis gradu quam minimam in curſu directo

recto

recto resistentiam offendant. Deinde cum remus secundum longitudinem in duas partes sponte distinguatur, alteram interiorem, quae intra nauim versatur, et a remigibus agitatur, alteram vero exteriorem pala instructam, qua per aquam vibratur; eam proportionem inter partem interiorem et exteriorem determinaui, vt ab eadem vi remum agitante maxima vis ad nauem propellendam proficiscatur; haec quidem proportio cum a pondere nauis eiusque resistentia, tum a numero remorum pendet, sed tamen inveni partem exteriorem semper longitudine interiorem excedere debere, quae maxime idonea proportio theoriae innixa in praxi etiam diligenter obseruatur. Hic autem magnopere dissentit Vir Celeb. Bouguer Academiae Regiae Parisinae Socius, in eximio tractatu gallico, quem nuper *de naue* edidit, vbi in capite de remorum actione, ad quasdam circumstantias minus attentus, conclusit,

vt nauis a remis promtiſſime proppellatur, requiri, vt pars interior longior ſit exteriore. Verum hic leuis eſt lapſus, atque excellentia reliquorum, quae in hoc opere pertractauit, argumentorum largiſſime compenſatur.

De hoc opere plurimum mea intereſt, vt quaedam, quae ad hos meos libros ab omni ſuspicione plagii liberandos faciunt, paucis admoneam, plura enim argumenta, quae vterque tractauimus, ita ſimili modo ſunt expoſita, vt equidem ea ex illo opere, quod fere quadriennium ante meum prodiit, hauſiſſe non immerito videri poſſem. Verum toti Academiae Imperiali, cuius iuſſu meum tractatum iam ab Anno 1737 conſcribere coepi, ſatis ſuperque notum eſt, priorem librum iam tum, cum Petropoli abiiſſem, quod factum eſt anno 1740, omnino fuiſſe abſolutum, ac poſteriorem librum, ad medietatem vsque perductum, quem deinceps hic Berolini ſtatim poſt meum

aduen-

aduentum penitus perfeci, ita vt vterque liber iam anno ſequente publicam lucem aſpicere potuiſſet, teſtes quoque in hanc rem allegare poſſem plures amicos meos, quibuscum iam ab illo tempore praecipua capita meditationum mearum communicaueram; ſed auctoritas Academiae mihi abunde ſufficit ad me vindicandum. Huc accedit, vt Celeb. Bouguerus toto illo tempore, quo ego in hoc ſtudio laboraui in America ſit commoratus, vbi etiam opus ſuum conſcripſiſſe dicitur, ita vt inter nos nullum commercium litterarium intercedere potuerit, ex quo alter ab altero quicquam proficere potuiſſet.

Atque haec ſunt fere, quibus Te, *Comes Illuſtriſſime* de inſtituto meo, quod in his libris ſum perſecutus, certiorem facere viſum eſt, vt quanti momenti haec ſcientia naualis in republica exiſtimari mereatur, hinc coniicere poſſis, Gratias autem Tibi,

quod

quod opus hoc meum publicatione dignum iudicare voluiſti, perſoluo maximas, atque qua me adhuc dignatus es gratia ac beneuolentia, vt me porro proſequi velis enixe rogo. Vale Tuoque Fauore complectere

COMES ILLVSTRISSIME

DOMINE GRATIOSISSIME

Dabam Berolini
d. 25 Ian. A. 1749

Tuum obſequioſiſſimum
L. EVLERVM.

Caput Primum.

DE
AEQVILIBRIO CORPORVM AQVAE INSIDENTIVM.

LEMMA.

1.

Pressio quam aqua in corpus submersum exercet in singulis punctis est normalis ad corporis superficiem; et vis, quam quodlibet superficiei submersae elementum sustinet, aequalis est ponderi cylindri aquei recti, cujus basis aequalis est ipsi superficiei elemento, altitudo vero aequalis profunditati elementi infra supremam aquae superficiem.

Demonstratio.

Quaelibet aquae particula deorsum premitur a cylindrulo aqueo superincumbente, et pressio aequatur ponderi huius cylindri. Quaeuis ergo particula hoc modo pressa tanta vi quaquauersum diffluere conatur, hocque ipso conatu particulas adiacentes eadem vi premit. Quare si corpus fuerit aquae submersum, id in singulis suae superficiei punctis a particulis aquae tanta vi premetur, quanta ipsae particulae premuntur, idque normaliter in superficiem. Vnde veritas lemmatis constat, quae autem plenius in hydrostatica euincitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

2. Cum pressio, quam corpus aquae submersum patitur, sit in singulis punctis ad superficiem corporis normalis, omnes pressiones coniunctim tendent ad corpus comprimendum et in minus spatium reducendum.

Coroll. 2.

3. Nisi ergo superficies corporis satis habeat firmitatis compressioni resistendi, corpus aquae submersum revera comprimetur et in minus spatium redigetur.

Coroll. 3.

4. Cum igitur constet, quantam pressionem singula superficiei corporis submersi elementa sustineant, simulque pressionum in singulis punctis directiones sint cognitae; determinari poterit vis, quam totum corpus a singulis aquae pressionibus coniunctis suffert.

Scholion.

5. Ad pressionem totalem, quam corpus aquae submersum sustinet, determinandam, a singulis elementis incipi debet. Cum enim directio pressionum aquae in singulis punctis sit normalis ad superficiem, hae singulae pressiones seorsim resolui debebunt, antequam earum media directio et potentia aequiualens assignari queat.

PROPOSITIO 1.

Problema.

Tab. I. fig. 1.

6. *Si superficiei planae verticalis* EAIBF *portio* AIB *aquae sit immersa, inuenire vim, quam portio perimetri* AIB *a pressione aquae sustinet.*

Solutio

Solutio.

Sit AB ſuperficies aquae ideoque linea recta horizontalis, quae inſtar axis conſideretur. Ex elemento curvae ſub aqua ſitae Mm ducantur ad axem applicatae verticales MP, mp vocenturque AP, x; PM, y, erit $Pp = Mn = dx$ $mn = dy$ et $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$. Iam preſſio, quam elementum Mm ſuſtinet aequatur rectangulo aqueo, cuius baſis eſt Mm, et altitudo aequalis PM, profunditati ſcilicet elementi Mm infra aquae ſuperficiem. Haec igitur preſſio erit $= y\,ds$, eiusque directio eſt normalis MN in elementum Mm. Reſoluatur haec preſſio in duas laterales, quarum altera tendat verticaliter ſurſum in directione MP altera vero horizontaliter ſit directa. Erit ergo ob MN : MP $= ds : dx$, vis elementum Mm ſurſum premens, $= y\,dx$; vis vero elementum Mm horizontaliter pellens $= y\,dy$. Integrando igitur erit vis aquae totum arcum AM horizontaliter propellens $= \frac{y^2}{2}$; vnde vis totam curuam ſubmerſam AMIB horizontaliter vrgens fiet $= 0$, puncto enim M in B translato evaneſcet applicata y. Vis autem quae totum arcum AM ſurſum premit, erit $= \int y\,dx =$ areae AMP. Quare tota curua AIB ſurſum vrgebitur vi, quae areae AIB eſt proportionalis; atque iſta vis aequalis erit ponderi aquae aream AIB occupantis. Q. E. F.

Coroll. 1.

7. Vis igitur aquae tendet figuram EIF verticaliter ſurſum ex aqua expellere, et reipſa expellet, niſi vel grauitate vel alia vi externa in hoc ſitu retineatur.

Coroll. 2.

8. Quia omnes vires horizontales, quibus elementa omnia curuae aquae submersa vrgentur sese destruunt: apparet figuram EIF aquae immersam neutiquam horizontaliter vrgeri. Quare etiam nulla opus est vi ad motum horizontalem cohibendum.

Coroll. 3.

9. Cum igitur vires horizontales sese destruant, et solae verticales supersint, cuiuis elemento Mm concipi potest vis id verticaliter sursum pellens applicata, quae aequalis est areae elemento $PMmp$.

Scholion.

10. Antequam vires, quas corpora aquae immersa a pressionibus aquae sustineant, investigare queant, necesse erat a superficiebus ordiri, etiamsi huiusmodi casus in mundo non detur. Sed cum casus magis compositi facilius enodentur, si prius simpliciores examini subiiciantur, eundem ordinem etiam hic retinere conuenit. Quamobrem neminem offendi arbitror locutionibus impropriis, quibus vti coactus sum, dum ponderis, quod rectangulum aqueum habeat, mentionem feci; hoc enim ad analogiam cum sequentibus declarandam indicare oportuit, vbi similes proprietates in ipsis corporibus detegentur.

PROPOSITIO 2.

Problema.

11. *Si figura plana verticalis aquae fuerit immersa, inuenire mediam directionem omnium pressionum aquae, et potentiam iis omnibus aequiualentem.*

Solutio

Solutio.

Cum, poſtquam ſingulae preſſiones aquae in elementa exertae reſolutae fuerint in verticales et horizontales, hae omnes preſſiones horizontales ſe mutuo deſtruant, ſolae verticales omnibus aquae preſſionibus aequiualebunt. Quare hoc tantum requiritur vt harum virium verticalium media directio et potentia aequiualens definiatur. Sed cum hae omnes potentiae directiones habeant parallelas, erit potentia aequiualens iis omnibus ſimul ſumtis aequalis ideoque proportionalis areae AIB. Directio porro erit quoque verticalis puta IL cuius diſtantia AK a puncto A inuenietur, diuidendo ſummam omnium momentorum ad quodpiam punctum fixum A relatorum per ipſarum potentiarum ſummam, quae eſt $=\int y\,dx$. Sed cum elementum Mm ſurſum vrgeatur vi $=y\,dx$ erit eius momentum reſpectu puncti A $=y\,x\,dx$. Vnde ſumma omnium momentorum erit $\int y\,x\,dx$, ſi poſt integrationem ponatur $x=AB$. Quare diſtantia AK erit $=\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, poſito ſcilicet poſt vtramque integrationem $x=AB$. Puncto ergo K determinato, erit verticalis per id ducta LI media directio omnium aquae preſſionum, atque potentia ipſa aequiualens erit $=\int y\,dx$ ſeu areae AIB. Q. E. F.

Coroll. 1.

12. Si O fuerit centrum grauitatis areae AIB, et ex eo perpendicularis OK ad axem AB ducatur, erit etiam $AK=\frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$, vti ex ſtaticis conſtat, quare recta verticalis, per centrum grauitatis partis ſubmerſae AIB ducta, erit media directio omnium aquae preſſionum.

Coroll. 2.

13. Loco omnium ergo aquae pressionum substitui potest vnica vis, figuram in directione IL verticaliter sursum pellens, quae aequalis est ponderi aquae aream AIB implentis.

Scholion.

14. Quae in casu, quo corpus aquae immersum ponitur tantum superficiei, circa pressionem aquae elicuimus, eadem quoque pro ipsis corporibus valent; vti mox ostendetur; scilicet quod potentiae horizontales omnes sese destruant et media directio sit linea verticalis per centrum grauitatis voluminis sub aquae mersi transiens, atque quod potentia aequiualens aequetur ponderi aquae parti submersae volumine aequali. Ceterum etiamsi hae proprietates iam satis sint cognitae, tamen eas methodo hac genuina analytice eruere ad viam ad sequentia praeparandam idoneum visum est.

PROPOSITIO 3.

Problema.

15. *Si corpus quodcunque ex aliqua parte aquae immergatur, determinare vim, quam eius pars aquae submersa a pressionibus aquae sustinet.*

Solutio.

Tab I. fig. 2.

Repraesentet planum tabulae sectionem corporis mersi verticalem, sitque AEIFBL sectio corporis horizontalis in aquae superficie facta, ita vt corporis pars infra hanc sectionem sita in aqua versetur. In hac sectione sumatur recta quaecunquae AB pro axe ad eumque ducantur duae ordinatae proximae LI, *li*, quas secent aliae rectae

rectae proximae axi parallelae EF, ef; ex punctis intersectionum Q, q R, r deorsum ducantur verticales, abscidentes in superficie corporis sub aqua elementum Mm, cuius areola sit dS. Iam ponatur AP$=x$, PQ$=y$ et QM$=z$, erit z profunditas elementi Mm infra superficiem aquae. Quare pressio aquae, quam elementum Mm sustinet, aequatur ponderi cylindri aquei cuius basis est dS et altitudo z, exponatur hoc pondus per zdS. Directio autem huius vis, cum sit normalis ad superficiem ducatur ad elemetrum Mm normalis MN, quae producta plano horizontali ALB occurrat in N, erit ergo MN directio vis aquae elementum Mm prementis, ad cuius positionem inveniendam exprimat haec aequatio $dz=Pdx+Qdy$ naturam superficiei, quae sub aqua versatur. Ex N tam ad axem AB, quam ad applicatam LI ducantur normales NH et NK, erit ex indole normalium PH$=Pz$ et QK$=-QZ$. Ducatur recta QN, quae quia est horizontalis, normalis erit ad verticalem QM, eritque QN$=z\sqrt{(P^2+Q^2)}$ et MN$=z\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Iam vis premens elementum Mm in directione MN, quae vis est $=z\,dS$, resoluatur in binas, quarum altera elementum Mm sursum vrgeat in directione MQ, altera vero horizontaliter in directiorne parallela ipsi QN. Cum autem sit MN:MQ$=\sqrt{(1+P^2+Q^2)}:1$ erit vis verticalis elementum Mm sursum pellens$=\frac{z\,dS}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, et vis horizontaliter iuxta parallelam ipsi QN vrgens$=\frac{zdS\sqrt{(P^2+Q^2)}}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$ Haec autem vis, quia eius directio non est constans, resoluatur denuo in duas secundum horizontales QK et QF sollicitantes, quarum illa, quae secundum parallelam applicatae

catae LI agit erit $= \frac{-QzdS}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$, et altera, cuius directio axi AB est parallela $= \frac{PzdS}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}$. Sed cum sit rectangulum $Qr = dx\,dy$ ad areolam $Mm = dS$ vt QM ad MN, erit elementum $Mm = dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ quo valore loco dS substituto, prodibit vis elementum Mm sursum vrgens $= zdxdy =$ prismati RM. seu aequalis est ponderi aquae, cuius volumen est prisma RM. Tota ergo corporis superficies, quae est sub aqua, premetur sursum a vi, quae aequalis est summae omnium prismatum, hoc est, quae aequalis est ponderi aquae, cuius volumen adaequat partem corporis in aqua versantem. Vis autem quae elementum Mm horizontaliter secundum parallelam applicatae LI sollicitat erit $= -Qzdxdy$. Si nunc ponatur abscissa $AP = x$ constans, habebitur vis horizontalis, quae omnia elementa sub fascia Li posita sollicitat, in directione parallela ipsi LI sumendo integrale ipsius $-Qzdxdy$, seu ob x constans erit haec vis $= -dx\int Qzdy$. At si x est constans erit $dz = Qdy$, quare ista vis erit $= -dx\int zdz = -\frac{z^2dx}{2}$. Posito nunc puncto Q in I vbi est $z = o$, exprimet $-\frac{z^2dx}{2}$ vim horizontalem parallelam ipsi LI, qua portiuncula superficiei sub aqua positae respondens elemento $Qq\,iI$ vrgetur. Translato ergo puncto Q in L, quo z iterum euanescit, haec vis quoque euanescet. Quare vis horizontalis, qua portio superficiei corporis sub fascia Li positae vrgetur aequalis fit nihilo. Et consequenter omnes vires horizontales parallelae applicatis LI, quibus omnia superficiei corporis sub aquae positae elementa vrgentur, sese destruunt. Deinde vis horizontalis, cuius directio axi AB est parallela, qua elementum Mm vrgetur

tur eſt $= Pz\,dx\,dy$ ſumto nunc $y = PQ$ conſtante, erit vis iſta horizontalis, qua ſuperficiei portiuncula ſub elemento E R poſita vrgetur $= dy\int Pz\,dx = \frac{z^2 dy}{2}$ propter $P\,dx = dz$ ſumto y conſtante. Translato ergo puncto Q in F, vbi fit $z = o$, tota vis horizontalis, qua portio ſuperficiei corporis ſub faſcia E f ſita ſollicitatur, euaneſcet. Ergo etiam haec vis horizontalis, cuius directio parallela eſt axi A B, qua tota corporis ſuperficies ſub aqua ſita vrgetur, euaneſcit. Quocirca tota preſſio, quam corpus in aqua immerſum a preſſionibus aquae ſuſtinet, conſiſtit in ſolis viribus verticalibus, quibus corpus ſurſum vrgetur, quarumque ſumma aequatur ponderi aquae, cuius volumen aequale eſt parti corporis ſubmerſae. Q. E. I.

Coroll. 1.

16. Quia vires horizontales vtriusque generis, quibus ſingula ſuperficiei ſub aqua merſae elementa ſollicitantur, coniunctim ſeſe deſtruunt; corpus a preſſionibus aquae tantum ſurſum pellitur, neque ipſi ab his preſſionibus motus horizontalis imprimi poteſt.

Coroll. 2.

17. Cum vis, qua corpus aquae immerſum ſurſum pellitur, aequalis ſit ponderi aquae, cuius volumen aequatur volumini partis corporis ſubmerſae, manifeſtum eſt niſum corporis, quam vi propriae grauitatis habet deorſum labendi, a preſſionibus aquae diminui. Et quidem eius proprium pondus diminuetur pondere voluminis aquae, quod aequale eſt volumini partis corporis ſubmerſae.

 Coroll.

Coroll. 3.

18. Quamobrem ſi tanta pars corporis aquae fuerit immerſa, vt tantum aquae volumen aequiponderet ipſi corpori, tum niſus deorſum labendi corporis euaneſcet, corpusque aquae innatabit.

Coroll. 4.

19. Ex his quoque perſpicitur, ſi minor pars, quam ad natandum requiritur, aquae fuerit immerſa, tum corpus ſibi relictum profundius immergi donec in aqua volumen occupet, cuius pondus aequale ſit ipſi corporis ponderi.

Coroll. 5

20. Contra ſi maior pars, quam ad natandum requiritur, aquae immergatur, tum vis aquae corpus ſurſum pellens maior erit, quam corporis grauitas, ideoque ſurſum eleuabitur, donec parti ſubmerſae aequale volumen aquae aequiponderans ſit ipſi corpori.

Scholion. I.

21. Haec, quae ſunt allata, pertinent potiſſimum ad corpora, quae grauitate ſpecifica leuiora ſunt quam aqua. Nam ſi corpus grauitate ſpecifica aquam ſuperet, tum ne totum quidem corpus aquae ſubmerſum tantae aquae quantitatis locum occupare poteſt, quae ipſi corpori aequiponderaret. Corpus igitur grauitate ſpecifica grauius quam aqua, etiam totum aquae ſubmerſum, conſeruabit niſum deorſum labendi, interim tamen hic niſus minor erit quam extra aquam in aere. Diminuetur ſcilicet eius pondus pondere aquae eiusdem voluminis, quod corpus habet,

eius-

eiusquae ratio ex praecedentibus aeque fluit, quam eorum, quae de corporibus leuioribus aqua deduximus.

Scholion. 2.

22. Quo igitur corpus aquae innatet, oportet vt tanta pars eius aquae immergatur, vt volumen aquae illi parti aequale idem habeat pondus, quod ipſum corpus habet. Nam ſi maior vel minor pars eſſet ſubmerſa, corpus vel aſcenderet vel deſcenderet magis, ſi ſibi ipſi eſſet relictum. Hoc igitur eſt primum atque maxime neceſſarium requiſitum ad natandum, vt corpus definitae magnitudinis partem aquae habeat immerſam; haecque regula ab auctoribus ita enunciari ſolet, vt dicant, omne corpus natans tantum aquae de ſuo loco depellere, quantum pondere ipſum corpus adaequet. Hoc autem ſolum ad natandum non ſufficit, ſed inſuper alius canon requiritur, ſecundum quem corpus, quo natet et in quiete perſiſtat, diſpoſitum eſſe debet. Quanquam enim vires horizontales ſe mutuo deſtruant, et hanc obrem corpus horizontaliter non promoueatur, tamen a ſolis viribus verticalibus, ex grauitate corporis, et preſſionibus aquae ortis, etiamſi inter ſe fuerint aequales, motus poteſt generari, quo quies turbatur, vti in ſequentibus fuſius oſtendetur.

PROPOSITIO 4.
Problema.

Tab. II. fig. 1.

23. *Si corpus quodcunque ex parte aquae immergatur, determinare mediam directionem omnium preſſionum aquae in partem ſubmerſam exertarum, atque potentiam omnibus illis preſſionibus aequiualentem.*

Solutio

Solutio.

Cum vires horizontales omnes, quae ex reſolutione preſſionum aquae in ſingula partis ſubmerſae elementa oriuntur, ſe mutuo deſtruant, ſolae vires verticales in conſiderationem veniunt. Quarum directiones, cum ſint inter ſe parallelae, erit quoque media earum directio verticalis atque potentia aequiualens aequabitur ſummae omnium virium verticalium. Quamobrem potentia aequiualens omnibus aquae preſſionibus aequalis erit ponderi aquae, cuius volumen aequale eſt parti corporis ſubmerſae. Sit autem eius directio, ſeu media directio omnium preſſionum aquae recta verticalis IK, quae ſectioni corporis horizontali ABCD cum ſuperficie aquae factae occurrat in puncto K, et ex puncto K ad axem in ſectione prolubitu aſſumtum ducatur perpendicularis KH. Iam conſideretur vt ante elementum partis ſubmerſae $Mm = dS$, indeque verticales ad planum ſectionis ACBD ducantur, itemque applicatae QP, qp. Tum ponatur vt ante $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$, exprimatque haec aequatio $dz = Pdx + Qdy$ naturam ſuperficiei ſubmerſae; ita vt ſit $dS = dxdy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ Vis autem, qua elementum Mm verticaliter ſurſum vrgetur, aequatur ponderi aquae voluminis $= zdxdy$, cuius momentum reſpectu horizontalis ad AB normalis et per A ducta eſt $zxdxdy$. Poſito igitur x conſtante et ſumto integrali ipſius zdy, ita vt toti ordinatae per punctum P ductae reſpondeat, dabit $\int xdx \int zdy$ ſummam omnium momentorum reſpectu horizontalis per punctum A ad AB normaliter ductae. Haecque expreſſio ſi diuidatur per volumen partis ſubmerſae, quod eſt $\int dx \int zdy$, prodibit diſtantia AH.

Di-

Diſtantia autem KH habebitur ſi ſumma omnium momentorum reſpectu axis AB diuidatur per volumen partis ſubmerſae $\int dx \int z dy$. Momentum autem vis elementum Mm verticaliter ſurſum pellentis eſt $yzdxdy$. Poſito nunc y conſtante et ſumto intergrali zdx ita vt omnibus applicatis y reſpondeat, tum dabit $\int y dy \int z dx$ ſummam omnium momentorum cis axem AB, ſimili vero modo quaeratur ſumma omnium momentorum vltra AB exiſtentium, et ab hac ſumma illa ſumma ſubtrahatur reſiduumque per $\int dx \int z dy$ diuiſum dabit diſtantiam HK. Cognito autem puncto K innoteſcit media directio quaeſita IK. Q. E. I.

Coroll. 1.

24. Cum vis, qua elementum Mm ſurſum vrgetur, proportionalis ſit priſmati elementari QRM, manifeſtum eſt rectam KI hoc modo inuentam per centrum grauitatis voluminis aquae ſubmerſi, quod ſit in O, tranſire. Eodem enim calculo, quo hic vſi ſumus, centrum grauitatis ſolet determinari.

Coroll. 2.

25. Media ergo directio omnium aquae preſſionum, quas corporis pars ſubmerſa patitur eſt linea verticalis, quae per centrum grauitatis partis ſubmerſae tranſit.

Coroll. 3.

26. Si ergo corpus aquae innatet, quo caſu volumen aquae parti ſubmerſae aequale aequiponderat ipſi corpori, tum potentia omnibus preſſionibus aquae aequiualens aequalis erit ponderi ipſius corporis.

 Coroll.

Coroll. 4.

27. Corpus igitur aquae innatans ab aqua tanta vi ſurſum pellitur, quantum eſt corporis pondus. Huius vero vis corpus ſurſum pellentis directio eſt linea verticalis per centrum grauitatis partis ſubmerſae tranſiens.

Scholion.

28. Ex conuenientia, quam demonſtrauimus inter mediam directionem preſſionum aquae et rectam verticalem per centrum grauitatis partis ſubmerſae, tranſeuntem, facile intelligitur, hoc punctum O eſſe debere centrum grauitatis corporis AIB tanquam homogenei conſiderati. Quare vtcunqne corporis pars ſubmerſa fuerit ex heterogenea materia conflata, tamen in puncto O inueſtigando haec pars ſubmerſa tanquam homogenea conſiderari debet. Hanc ob cauſam vt ambiguitatem in voce centri gravitatis evitem, in poſterum iſtud grauitatis centrum O, quod ex conſideratione corporis homogenei quaeri debet, centri magnitudinis nomine appellabo. Centrum igitur magnitudinis partis ſubmerſae inuenietur, ſi pars ſubmerſa tanquam ex materia homogenea conſtans conſideretur, eiusque centrum grauitatis definiatur. Hoc itaque centrum magnitudinis partis ſubmerſae, quoque erit centrum grauitatis aquae de ſuo loco depulſae, vel eius aquae, quae ante quam corpus immergebatur, ſpatium AIB occupauerat.

LEMMA.

Tab. II. fig. 2.

29. *Corpus* ABC, *cui duae potentiae* Gg *et* Oo *in directionibus parallelis et contrariis ſunt applicatae, in aequi-*

aequilibrio esse non potest, nisi illae potentiae sint inter se aequales, earumque directiones in eandem rectam incidant.

Demonstratio.

Si potentiae fuerint inaequales, manifestum est corpus in aequilibrio esse minime posse: nam etiamsi coinciderent, fortior corpus in sua directione promoueret. At si potentiae fuerint aequales, neque vero coincidant, tum eae corpus ABC secundum plagam BAC circa se ipsum conuertent. Quare quo corpus quiescat, necesse est vt potentiae Gg et Oo non solum sint aequales, sed etiam vt earum directiones coincidant. Q. E. D.

PROPOSITIO 5.

Theorema.

30. *Corpus aquae libere insidens in quiete seu aequilibrio esse nequit, nisi tum pars submersa volumine adaequet pondus aquae ipsi corpori aequale, tum vero nisi totius corporis centrum grauitatis atque centrum magnitudinis partis submersae in eandem rectam verticalem incidant.*

Demonstratio.

Tab. III. Fig. 1.

Sit EAIBF corpus aquae vtcunque insidens et AIB eius pars submersa. Cum iam corpus ponatur liberum, nullas sentiet sollicitationes ad motum, praeter suam vim grauitatis et pressiones aquae, quas eius pars submersa patitur. At vis corporis grauitatis aequatur ponderi ipsius, eiusque directio est recta verticalis transiens per ipsius centrum grauitatis. Ponatur P = ponderi totius corporis, et sit G eius centrum grauitatis; quibus positis corpus propter grauitatem deorsum vrgebitur in directione GH

a vi

a vi P. Deinde omnibus aquae pressionibus aequiualet vis directe sursum pellens in directione OL per centrum magnitudinis O partis submersae transeunte, quae quantitate adaequat pondus aquae spatium a parte submersa occupatum implentis; posito ergo hoc pondere Q propter pressiones aquae corpus in directione OL sursum vrgebitur vi $=Q$. Corpori igitur nostro aquae hac ratione insidenti omnino duae vires P et Q sunt applicatae, quarum altera corpus in directione GH deorsum altera vero in directione OL sursum sollicitat. Per lemma itaque praemissum corpus in aequilibrio esse nequit, nisi simul sit $Q=P$ et recta LI in rectam HK incidat. Fit autem $Q=P$, si tanta pars aquae submergatur, quae volumine adaequet pondus aquae ipsius corporis ponderi aequale, deinde vero lineae LI et HK coincident, si centrum grauitatis G totius corporis et centrum magnitudinis O partis submersae in eadem recta verticali sint sita. Q. E. D.

Coroll. 1.

31. Duo ergo requiruntur ad hoc, vt corpus aquae insidens possit esse in aequilibrio, quorum si alterutrum desit, corpus in quiete persistere nequit.

Coroll. 2.

32. Quoties ergo corpus aquae insidere videmus, tum certum est, partem eius submersam volumine aequalem esse ponderi aquae ipsius corporis ponderi aequali: Atque praeterea centrum magnitudinis partis submersae et centrum grauitatis totius corporis in eadem recta verticali esse sita.

Coroll.

Coroll. 3.

33. Quare ſi corpus aquae innatans fuerit in aequilibrio, tum recta iungens centrum grauitatis totius corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, erit normalis in ſectionem aquae AB.

Coroll. 4.

34. Cum per experimenta conſtet pondus, quo datum aquae volumen grauitat, ex dato corporis cuiusvis pondere inueniri poterit quantitas partis ſubmerſae ad aequilibrium producendum requiſita.

Scholion 1.

35. Quo in ſequentibus plures circumlocutiones euitem, loco integrarum deſcriptionum terminis conuenientibus vtar. Ita centrum grauitatis totius corporis vocabo tantum ſimpliciter centrum grauitatis; atque centrum magnitudinis partis ſubmerſae tantum centrum magnitudinis, cum hae voces nunquam alio ſenſu occurrant. Deinde etiam ſectionem, quam corpus cum ſuprema aquae ſuperficie conſtituit, vocabo ſimpliciter ſectionem aquae. Simili modo verticalis centri grauitatis nobis erit recta verticalis per centrum grauitatis totius corporis tranſiens, atque verticalis centri magnitudinis denotabit rectam verticalem per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeuntem.

Scholion 2.

36. Quando in ſequentibus ope harum regularum eos corporum ſitus determinabimus, in quibus aquae inſi-

dere possint, id ita intelligi debet, vt corpus, si in eiusmodi situ definito aquae accuratissime collocetur, tum demum in hoc situ sit quieturum. At si tantillum ex hoc situ remoueatur vel inclinetur, vtrum tum sponte sese restituat, an vero in alium situm se recipiat? alia quaestio est, quae huc nondum pertinet, sed quam in sequentibus enodabo. Si autem situs, in quo corpus aquae impositum quiescere potest, ita fuerit comparatus, vt, corpus, si tantillum ex eo situ declinetur, se non restituat, sed alium situm quaerat, in quo acquiescat, tum difficillimum est efficere, vt corpus in eo situ persistat. Etsi enim summa sollertia in eum situm collocetur, tamen leuissima vi vel aeris vel aquae statim ex eo deturbabitur, adeo vt difficillimum sit, huiusmodi casus per experimenta comprobare. Veluti nullum est dubium, quin baculus leuis aquae verticaliter ita immiti queat, vt aequilibrium obtineatur; interim tamen in hoc situ constitutus quasi sua sponte procumbet, situmque horizontalem affectabit, in quo acquiescat.

PROPOSITIO 6.

Theorema.

Tab. II. fig 3.

37. *Omne corpus, quod generatur ex rotatione cuiuscunque figurae ACFB circa axem quempiam* AB, *facta, ita aquae insidere poterit, vt eius axis* AB *teneat situm verticalem, dummodo centrum grauitatis fuerit positum in ipso axe* AB.

Demonstratio.

Recta EF ad axem AB normali abscindatur area EBF, quae circa axem conuersa generet solidum, quod volumine

lumine adaequet pondus aquae totius corporis ponderi aequale, poteritque hoc solidum esse pars aquae immergenda, quo corpus in quiete permaneat, si modo alterum requisitum in hoc situ locum inueniat. At huius partis submersae, quae generatur ab area EFB, centrum magnitudinis cadit in axem AB, quare cum in eundem quoque centrum grauitatis cadere ponatur, poterit corpus ita aquae insidere, vt axis AB teneat situm verticalem. Q.E.D.

Coroll. 1.

38. Ex hac demonstratione etiam intelligitur, hoc corpus quoque inuerso situ, quo B sursum A vero deorsum dirigitur, aquae insidere posse; adeo vt iam duo constent situs, quibus huiusmodi corpora aquae insidere possunt.

Coroll. 2.

39. Hinc etiam sequitur globum, cuius centrum grauitatis in ipso centro est positum, quocunque situ aquae insidere posse. Recta enim quaelibet per centrum transiens axis AB locum sustinere potest.

Coroll. 3.

40. Ad hanc corporum classem pertinent cylindri recti itemque coni recti tam integri quam truncati. Quare etiam haec corpora aquae ita innatare poterunt, vt eorum axes teneant situm verticalem, si modo eorum centra grauitatis in ipsos axes incidant.

Scholion.

41. Corpora haec rotunda hanc habent proprietatem, vt omnes sectiones ad axem normales sint circuli,

 et

et demonſtratio hoc nititur principio, quod axis AB per ſingularum ſectionum transuerſalium centra grauitatis tranſeat. Quare eadem propoſitio aeque valebit pro corporibus, quorum ſectiones ad axem normaliter factae ſint polygona regularia quaecunque, ac pro circulis. Quamobrem etiam huiusmodi corpora aquae ita innatare poterunt, vt axes ſitum verticalem teneant, ſi modo centrum grauitatis totius corporis in hoc ipſo axe fuerit poſitum.

Coroll. 4.

42. Si ergo huiusmodi corpora ex materia homogenea fuerint fabricata, tum vtique eorum centra grauitatis in axes ſuos incident. Quare hinc concludere licet, omnia corpora homogenea, quae eiusmodi habent figuras, aquae ita inſidere poſſe, vt eorum axes ſint verticales.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

Tab. III. fig. 2.

43. *Corpus cylindricum* DEIH, *cuius omnes ſectiones transverſales* DE, FG, HI *ſunt inter ſe aequales et ſimiles, ſitu erecto verticali aquae inſiſtere poteſt, ſi modo eius centrum grauitatis fuerit in recta* AB *per omnium ſectionum centra grauitatis tranſeunte.*

Demonſtratio.

Ponatur portio FGIH tanta, quanta aquae immergi debet, eaque re ipſa aquae concipiatur ſubmerſa. Erit ergo huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis in recta BC ſitum, quippe quae tranſit per omnium ſectionum transverſalium centra grauitatis ſeu magnitudinis. In eadem autem recta AB ſitum eſſe ponitur centrum grauitatis totius

tius corporis. Quare cum recta AB ad sectionem aquae FG sit normalis, corpus in hoc situ aquae insidere poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

44. Me non monente facile etiam intelligitur, idem corpus situ quoque inverso quo HI sursum DE vero deorsum vergit, aquae insistere posse; ita vt consequenter duo situs sint cogniti, quibus huiusmodi corpora aquae insidere possint.

Coroll. 2.

45. Si corpus DEIH fuerit ex materia homogenea factum, centrum grauitatis per se in rectam AB incidit. Quare huiusmodi corpora semper aquae situ erecto insidere poterunt, idque duplici modo

Scholion.

46. Ad hoc corporum genus pertinent praeter cylindros vulgares rectos omnia prismata recta, quascunque etiam habeant bases siue regulares siue inregulares. Deinde etiam pariter huc referuntur omnia solida quae generantur, si figura quaecunque plana secundum ductum lineae rectae ad planum figurae perpendicularis motu sibi semper parallelo moueatur. Atque de his omnibus valet Theorema propositum.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

47. *Corpus cylindricum* abdc, *quale in praecedente propositione considerauimus, situ horizontali* bd *aquae insidere poterit, si eius centrum grauitatis* G *in eius sectionem mediam*

Tab. III. Fig. 3.

mediam e f *incidat. Et quidem eodem ſitu aquae inſidere poterit, quo ſectio media ſola* ALBI *aquae ſitu verticali innatare poteſt, ſi eius centrum grauitatis in* G *fuerit ſitum.*

Demonſtratio.

Inſideat enim hoc corpus aquae ſitu horizontali, ſitque tanta eius pars iam immerſa, quanta ad aequilibrium requiritur; manifeſtum eſt centrum magnitudinis o partis ſubmerſae quoque in ſectionem mediam *e f* cadere debere, eſſeque in ipſo centro magnitudinis partis ipſius ſectionis mediae ſubmerſae. Niſi ergo haec centra G et *o* in eandem rectam verticalem incidant, conuertatur corpus eousque donec illa centra hoc requiſitum acquirant. Quo facto ſit LAIB ſitus ſectionis mediae, AB ſectio aquae, G eius centrum grauitatis, quod congruere ponimus cum totius centro grauitatis, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae AIB, quod per ſe conuenit cum centro magnitudinis in ipſo corpore *ad*. Quare ſi recta G*o* fuerit verticalis, tam ſola ſectio LI quam totum corpus hoc ſitu aquae inſidere poterit. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Quo autem ſectionis LAIB ſolius tanta pars aquae immergatur, quanta immergi debet, ſi eſt cum corpore coniunctum, ipſi huic ſectioni eadem grauitas ſpecifica reſpectu aquae tribui debet, quam habet integrum corpus.

Coroll. 2.

49. Si corpus fuerit homogeneum, tum eius centrum grauitatis non ſolum in ſectionem mediam *e f* incidet ſed inſuper in ipſius ſectionis mediae centro grauitatis erit ſitum.

Coroll.

Collor. 3.

50 Vt igitur huiusmodi corporum cylindricorum ſitus, quo horizontaliter aquae inſidere poſſint, determinetur, ſufficiet inquirere, in quonam ſitu vna eius ſectio aquae verticaliter inſiſtere poſſit.

Scholion.

51. Quo igitur definiri queat ſitus, quo huiusmodi corpora cylindrica aquae horizontaliter incubare poſſint, tantum ad figuram ſectionum transuerſalium reſpiciendum eſt. Problema ergo huc redit, vt data quacunque figura plana LAIB, eius grauitate ſpecifica reſpectu aquae et centro grauitatis G determinetur pars AIB aquae immergenda, quae quidem quantitate conſtat, vt recta iungens centrum grauitatis G et centrum magnitudinis *o* partis AIB ſit in ſectionem aquae AB normalis. Quamobrem ad noſtrum inſtitutum conueniet aliquot huiusmodi figurarum planarum conſiderare, et quibusnam ſitibus aquae verticaliter innatare queant inueſtigare. Praecipue autem ad corpora cylindrica ſeu priſmatica homogenea reſpiciemus, et hanc ob cauſam pro centro grauitatis G figurae LAIB ſumemus ipſius figurae centrum grauitatis; ita vt nobis quaeſtio huc reducatur; A data figura LAIB ducendo rectam AB partem AIB datae magnitudinis abſcindere, hac conditione vt recta iungens centra totius figurae et partis abſciſſae perpendicularis ſit ad rectam AB. Incipiamus igitur *a* triangulo tanquam figura ſimpliciſſima indeque ad quadrilatera progrediemur.

LEMMA.

52. *Si per trianguli* ACB *centrum grauitatis* G *ducatur recta quaecunque* IPQ *lateri* BC *producto in* Q *occurrens*, *erit* AC. CQ − BC. CP = 3 CP. CQ.

Tab. IV. Fig. 1.

De-

Demonſtratio.

Ex angulis A et B per centrum grauitatis G ducantur rectae AH, et BK quae per notam centri grauitatis proprietatem biſecabunt latera BC et AC eritque AG : GH = 2 : 1. et BG : GK = 2 : 1. Eſt vero ſin. API : ſin. BQI $= \frac{AG}{AP} : \frac{GH}{HQ} = \frac{GK}{KP} : \frac{BG}{BQ} =$ CQ:CP. Ex quibus proportionibus eruitur BC + 2 CQ : AC − CP = BC + CQ : AC − 2 CP = CQ : CP atque hinc AC. CQ − BC. CP = 3 CP. CQ. Q. E. D.

Coroll. 1.

53. Si ſinus anguli API ponatur $= m$, et ſinus anguli BQI $= n$; erit $m : n =$ CQ : CP. Vnde cum ſit CQ $= \frac{AC \cdot CQ - BC \cdot CP}{3\, CP}$ erit CQ $= \frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3n}$ et CP $= \frac{m \cdot AC - n \cdot BC}{3m}$.

Coroll. 2.

54. Si ex A ducatur ipſi GQ parallela donec ipſi BC productae occurrat, erit ea = 3 GQ. Quocirca erit CP : PQ = AC : 3 GQ atque GQ $= \frac{AC \cdot PQ}{3 \cdot CP}$. Poſito ergo ſin. ACB $= k$ erit GQ $= \frac{K \cdot AC}{3n}$.

Coroll. 3.

55. Si recta QI fuerit normalis in AB, erit BC : AC = coſ. API : coſ. BQI. Quare ſi coſinus anguli API ponatur M et coſinus ang. BQI = N erit BC : AC = M : N ſeu M. AC = N. BC.

PROPOSITIO 9.

Problema.

Tab. IV. fig. 2.

56. *Propoſito triangulo homogeneo* ACB, *cuius ad aquam grauitas ſpecifica ſit vt* p *ad* q, *caſus determinare, quibus*

quibus hoc triangulum aquae ita innatare potest, vt latus AB *maneat extra aquam situm.*

Solutio.

Sit aCb pars quaesita aquae immergenda, quo triangulum aquae insidere queat, sitque recta IPQ ducta per centra grauitatis tum totius trianguli ACB tum partis submersae aCb. Quo ergo triangulum in hoc situ aquae insidere queat, oportet vt recta IQ sit in ab perpendicularis atque praeterea vt area trianguli aCb sit ad aream ACB vt $p:q$. Ponatur nunc $AC = a$ $BC = b$ atque sinu anguli $ACB = k$, eiusque cosinu $= K$. Porro sit $aC = x$, $bC = y$, sin. $API = m$ eius cosinus $= M$, item sin. $BQI = n$ et cos. $= N$. His positis erit $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$. Cum nunc recta QPI transeat per centrum grauitatis trianguli ACB erit $CQ = \frac{ma - nb}{3n}$ Deinde quia eadem recta per centrum grauitatis trianguli aCb transit, erit $CQ = \frac{mx - ny}{3n}$, quibus coniunctis erit $mx - ny = ma - nb$. Porro cum recta PI normaliter occurrat rectae ab erit $Mx = Ny$, ex quibus aequationibus elicitur $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et $y = \frac{M(ma - nb)}{mN - Mn}$. Quoniam vero est $m = kN - Kn$ et $M = kn + KN$, substituantur hi valores in aequatione $x = \frac{N(ma - nb)}{mN - Mn}$ et posito $t = \frac{n}{N}$ prodibit $x = \frac{ka - Kat - bt}{k - 2Kt - ktt}$ atque $y = (kt + K)x$. Hinc vero inuenitur $t = \frac{\frac{1}{2}(b + Ka) - Kx + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}}{Kx}$ atque $y = \frac{1}{2}(b + Ka) + \sqrt{(\frac{1}{4}(b + Ka)^2 - ax - Kbx + x^2)}$ Denique est triang. aCb ad triang. ACB vt xy ad ab, erit ergo $p:q = xy:ab$ et $y = \frac{pab}{qx}$, quo valore loco y in

in ſuperiore aequatione ſubſtituto prodibit $q^2x^4-(a+Kb)q^2x^3+(b+Ka)pqabx-a^2b^2p^2=0$. Valor igitur ipſius x ex hac aequatione erutus dabit latus aC, quo inuento ſi ſumatur $b\text{C}=\frac{pab}{q.a\text{C}}$ habebitur ſectio aquae ab, atque pars aquae immergenda quaeſita. Q. E. I.

Coroll. 1.

57 Quot igitur aequatio inuenta continet radices reales et affirmatiuas tot caſibus triangulum propoſitum aquae ita inſidere poterit, vt latus AB extra aquam maneat, ſolusque angulus C immergatur, dummodo ſit $x < a$ et $y < b$.

Coroll. 2.

58. Si autem omnes 4 radices fuerint reales, tum earum tres tantum poſſunt eſſe affirmatiuae ob ternas tantum ſignorum alternationes. Radix autem negatiua propoſito non inſeruit. Quare non dari poſſunt plures tribus caſus, quibus triangulum praeſcripto modo aquae inſiſtere poteſt.

Coroll. 3.

59. Praeterea neque x maius eſſe poteſt quam a neque y maius quam b. Quare ſi eueniat vt vel x excedat a vel y excedat b, tum hi quoque caſus erunt inutiles.

Coroll. 4.

60. Si tertium latus trianguli AB ponatur $=c$, hocque loco coſinus K ang. ACB in computum introducatur, propter $K=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ prodibit $q^2x^4-\frac{q^2x^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2)+\frac{apqx}{2}(a^2+3b^2-c^2)-a^2b^2p^2=0$.

Coroll.

Coroll. 5.

61. Duae autem aequationes, in quibus insunt x et y, simplicissimae sunt sequentes. Prima scilicet est $qxy = pab$, atque altera erit ista $y^2 - (b + Ka)y = x^2 - (a + Kb)x$; quibus duabus aequationibus problema propositum soluitur.

Scholion.

62. Cum aequatio inuenta habeat quatuor dimensiones neque generaliter concepta diuisionem admittat, ita vt vix quicquam ex illa ad vsum deduci queat; eam ad casus particulares triangulorum accommodabimus, pro quibus aequatio fit diuisibilis, atque casus, quibus natatio euenire potest, reipsa assignari et repraesentari possunt.

Exemplum 1.

Tab. IV. fig. 3.

63. Sit triangulum propositum ACB isosceles, ita vt latera AC et BC, quae angulum C sub aqua situm, comprehendunt sint aequalia. Ponatur ergo $BC = AC = a$, erit $b = a$, atque aequatio inuenta abibit in hanc $q^2x^4 - (1 + K)q^2ax^3 + (1 + K)pqa^3x - a^4p^2 = o$, quae diuisione resoluitur in has duas I. $qx^2 - pa^2 = o$ et II. $qx^2 - (1 + K)qax + pa^2 = o$. Quarum illa aequatio dat $x = \pm aV\frac{p}{q}$, solus autem valor affirmatiuus habet locum, quia latera AC et BC non vltra C producta ponuntur. Quare ex prima aequatione erit $aC = x = aV\frac{p}{q}$ et $bC = y = aV\frac{p}{q}$, qui ergo est vnus casus, quo triangulum isosceles, ACB aquae insidere potest; eritque pars submersa aCb itidem triangulum isosceles, et sectio aquae ab parallela basi AB, atque $AC : aC = Vq : Vp$. Ex altera aequatione pro x duo obtinentur valores, quorum alter si pro x capiatur,

 alter

alter pro y valebit, adeo vt vel neuter vel vterque fit locum habiturus. Erit vero $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm aV(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q})$, atque $y = \frac{1}{2}(1+K)a \mp aV(\frac{1}{4}(+K)^2 - \frac{p}{q})$; qui valores ne fiant imaginarii oportet vt fit $1+K > 2V\frac{p}{q}$ seu $K > 2V\frac{p}{q} - 1$. Praeterea quia tam x quam y minores esse debent quam a, oportet fit $\frac{1}{2}(1+K) \pm V(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q}) < 1$ seu $\pm V(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{p}{q}) < \frac{1}{2}(1-K)$, vnde erit $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ denotante α quemcunque numerum affirmatiuum. Quamobrem quo praeter casum assignatum adhuc duo reliqui locum habeant, oportet vt in his duabus aequationibus $K = 2V\frac{p}{q} - 1 + \beta$ et $K = \frac{p}{(1-\alpha)q} - \alpha$ tam α quam β obtineant valores affimatiuos. Quod si ergo euenerit, prodibunt duo reliqui casus quibus triangulum aquae insidere potest

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(1+K)a + aV(\tfrac{1}{4}(1+K)^2 - \tfrac{p}{q}) \\ y &= \tfrac{1}{2}(1+K)a - aV(\tfrac{1}{4}(1+K)^2 - \tfrac{p}{q}) \end{aligned}\right\} \text{casus secundus.}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(1+K)a - aV(\tfrac{1}{4}(1+K)^2 - \tfrac{p}{q}) \\ y &= \tfrac{1}{2}(1+K)a + aV(\tfrac{1}{4}(1+K)^2 - \tfrac{p}{q}) \end{aligned}\right\} \text{casus tertius.}$$

Coroll. 1.

64. Si triangulum ACB fuerit aequilaterum, erit angulus C 60°, ideoque eius cosinus $K = \frac{1}{2}$. Quare quo duo posteriores casus locum inueniant oportet fit primo vt $\frac{3}{2} > 2V\frac{p}{q}$ hoc est vt $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Deinde necesse est quoque vt fit $\frac{p}{q} = (1-\alpha)(\frac{1}{2}+\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \alpha^2$, sumto pro α numero affirmatiuo quocunque. Quod autem $\frac{p}{q}$ fit fractio affirmatiua oportet fit $\alpha < 1$. Requiritur ergo vt fit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$.

Scholion.

Scholion.

65. Cum alterum requisitum, ne duo posteriores casus fiant impossibiles, sit $\frac{p}{p} < \frac{1}{4}(1+K)^2$ ponatur $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}(1+K)^2 - \alpha^2$, et per alterum requisitum debebit esse $\alpha < \frac{1}{2}(1-K)$. Erit ergo $\alpha^2 < \frac{1}{4}(1-K)^2$ ideoque $\frac{p}{q} > K$. Quocirca dato angulo ACB, nisi ratio $\frac{p}{q}$ contineatur intra limites $\frac{1}{4}(1+K)^2$ et K, praeter situm primo determinatum alius non datur, quo triangulum isosceles vertice deorsum verso aquae innatare potest. Est vero semper $\frac{1}{4}(1+K)^2 > K$, differentia enim est quadratum $\frac{1}{4}(1-K)^2$, quare pro quouis angulo C triangula exhiberi possunt, quae tribus modis angulo C deorsum verso aquae insidere possunt.

Coroll. 2.

66. In triangulo autem aequilatero, si fuerit $\frac{p}{q} > \frac{1}{2}$ et $< \frac{9}{16}$, duo casus posteriores quibus triangulum aquae insidere potest erunt $x = \frac{3}{4}a \pm a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})}$, et $y = \frac{3}{4}a \mp a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{p}{q})}$

Coroll. 3.

67. Si angulus C fuerit rectus erit $K = o$ huiusmodi igitur triangula triplici modo aquae innatare poterunt, dummodo sit $\frac{p}{q} < \frac{1}{4}$. Tum vero erit I. $x = a\sqrt{\frac{p}{q}}$; II. $x = \frac{1}{2}a + a\sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})}$ et III. $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{p}{q})}$.

Exemplum 2.

68. Si grauitas specifica trianguli ita fuerit comparata vt sit $p : q = Kb : a$ abibit aequatio generalis in hanc:

 $x^4 -$

Tab. V. fig. 1. $x^4-(a+Kb)x^3+(b+Ka)Kb^2x-K^2b^4=o$ quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $x-Kb=o$; et II. $x^3-ax^2-Kabx+Kb^3=o$. Harum aequationum prima dat $Ca=x=Kb$ et cum ſit $y=\frac{pab}{qx}$ fiet $y=b$. Incidet ergo punctum b in B, et recta Ba erit ſectio aquae.

Coroll. 1.

69. Cum ſit Ca=Kb, erit $\frac{Ca}{CB}=K=$ coſinui ang. C. Quare recta Ba erit parpendicularis in latus AC. Haec ergo perpendicularis ſemper poteſt eſſe ſectio aquae, ſi fuerit $p:q=Ca:CA$.

Coroll. 2.

70. Iſta autem innatatio locum habere non poteſt, niſi vterque angulus A et C ſit acutus, alioquin enim recta Ca non intra triangulum caderet quod tamen eſt neceſſe.

Scholion.

71. Simili modo ſi aſſumſiſſemus $p:q=Ka:b$, aequatio diuidi potuiſſet per $x-a$, ita vt prodiiſſet $x=a$. Hic vero caſus a priore non differt, niſi quod punctum B in A et viciſſim ſit translatum. Determinatis ergo caſibus, quibus triangulum homogeneum aquae verticaliter ita innatare poteſt, vt vnicus angulus aquae immergatur, ſupereſt vt etiam in eos caſus inquiramus, quibus huiusmodi triangula cum duobus angulis ſub aqua ſubmerſis innatare queant; his enim in duobus modis continentur omnes omnino caſus, quibus triangulum aquae verticaliter innatare poteſt.

PROPO-

PROPOSITIO 10.

Problema.

72. *Proposito triangulo homogeneo* CAB *cuius grauitas specifica sit ad aquam vt* p *ad* q, *determinare casus, quibus hoc triangulum situ verticali aquae ita insidere potest, vt solus angulus* C *supra aquam emineat.*

Tab. V. Fig. 2.

Solutio.

Sit $aABb$ pars aquae immergenda, quae quaesito satisfaciat. Per centra grauitatis tam totius trianguli ACB, quam partis submersae $aABb$ ducatur recta IPQ, quae debebit esse normalis in sectionem aquae ab. At ista recta IPQ quoque transibit per centrum grauitatis trianguli Cab supra aquam eminentis. Quamobrem quaestio huc reducitur vt inueniatur positio rectae ab, quae a toto triangulo partem $aABb$ abscindat, quae sit ad totum vt p ad q; atque vt recta iungens centra grauitatis totius trianguli et trianguli Cab sit normalis ad sectionem aquae ab. Haec ergo posterior conditio prorsus conuenit cum praecendente problemate, prior vero in hoc discrepat quod hic area trianguli Cab se habere debeat ad aream trianguli totius CAB vt $q-p$ ad q; cum haec ratio ibi esset vt p ad q. Qamobrem solutio prioris problematis ad hoc accomodabitur, si tantum $q-p$ loco p scribatur. Ponatur ergo vt ante $AC=a$, $BC=b$, cos. ang. ACB $=K$, et $Ca=x$ atque $Cb=y$, erit $q^2x^4-(a+Kb)q^2x^3+(b+Ka)(q-p)qabx-(q-p)^2a^2b^2=0$. Ex qua aequatione valor ipsius x erutus dabit respondentem valorem ipsius $y=\frac{(q-p)ab}{qx}$. Q. E. I.

Cor. 1.

Coroll. 1.

73. Quod igitur aequatio inuenta continebit radices reales et affirmatiuas pro x quae ſunt ipſo a minores et quibus reſpondent valores ipſius y minores quam b, tot modis triangulum propoſitum aquae ita inſidere poterit, vt anguli A et B ſub aqua verſentur.

Coroll. 2.

74. Sin autem aequationis propoſitae omnes radices ſunt reales, earum tres tantum eſſe poſſunt affirmatiuae. Quare fieri non poteſt, vt triangulum pluribus quam tribus modis aquae ita innatare queat, vt ſolus angulus C extra aquam emineat.

Coroll. 3.

75. Si tertium latus AB ponatur $= c$, hocque loco coſinus K anguli ACB introducatur, tum ſequens orietur aequatio $q^2x^4 - \frac{q^2y^3}{2a}(3a^2+b^2-c^2) + \frac{(q-p)qax}{2}(a^2+3b^2-c^2) - (q-p)^2a^2b^2 = 0$.

Coroll. 4.

76. Si fuerit $p : q = 1 : 2$, haec aequatio congruit, cum aequatione ſuperioris propoſitionis. Quare hoc caſu eadem recta ab poterit eſſe ſectio aquae tam ſi angulus C fuerit ſolus extra aquam, quam ſi fuerit aquae ſubmerſus.

Exemplum.

77. Ponatur triangulum propoſitum ACB iſoſceles, latus ſcilicet $BC = AC$ ſeu $b = a$, atque prodibit iſta aequatio $q^2x^4 - (1+K)q^2ax^3 + (1+K)(q-p)qa^3x - (q-p)^2 a^4 = 0$,

$a^4 = o$, quae per diuisionem abit in has duas aequationes I. $qx^2 - (q-p)a^2 = o$ et II. $qx^2 - (1+K)qax + (q-p)a^2 = o$. Harum aequationum prior dat $x = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$, cui quoque respondet $y = a\sqrt{\frac{q-p}{q}}$, hoc ergo casu triangulum extra aquam eminens erit quoque isosceles, et sectio aquae ab parallela basi AB. Altera aequatio has duas pro x dat quantitates $x = \frac{1}{2}(1+K)a \pm a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q})}$, quibus respectiue respondet $y = \frac{1}{2}(1+K) \mp a\sqrt{(\frac{1}{4}(1+K)^2 - \frac{(q-p)}{q})}$. Praeter primum ergo situm inuentum alius non dari potest, nisi sit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, at etiamsi fuerit $\frac{q-p}{q} < \frac{1}{4}(1+K)^2$, hoc solum non sufficit ad realitatem posteriorum casuum; insuper enim requiritur vt tam x quam y sint ipso a minores, id quod locum habebit si fuerit $\frac{q-p}{q} > K$. Quamobrem, quo casus posteriores fiant reales, oportet vt ratio $\frac{p}{q}$ inter hos limites $1 - K$ et $1 - \frac{1}{4}(1+K)^2$ contineatur.

Scholion.

78. Ex his igitur duabus propositionibus omnes casus definiri possunt, quibus datum triangulum homogeneum aquae situ verticali innatare potest. Perspicitur autem simul numerum casuum satis magnum esse posse, prout plures radices aequationum inuentarum sint reales et quaesito satisfacientes. Omnes autem radices si fuerint vtiles, tum triangulum 18 diuersis modis aquae innatare poterit; tres enim sunt casus, quibus singuli anguli aquae immerguntur, totidemque quibus singuli extra aquam eminent. Vix autem euenire potest, vt omnes octodecim casus fiant reales quia si grauitas specifica trianguli ad aquam pro

E vno

vno angulo requiſitam habet proprietatem, eadem pro reliquis angulis non amplius ſatisfacere poteſt. Ita triangulum aequilaterum, ſi quidem eius grauitas ſpecifica ad aquam contineatur inter rationes 16 et 9 : 16, quo caſu plurimas admittit radices ſatisfacientes, 12 tantum diuerſis modis aquae inſidere poteſt.

LEMMA.

Tab. V. fig. 3.

79. *Si ex trianguli* ABC *centro grauitatis* G *in latus* AB *perpendicularis* GQ *ducatur, erit lateris* AB *ſegmentum* $AQ = \frac{3 \cdot AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$.

Demonſtratio.

Ex angulo C per centrum grauitatis G ad latus AB ducatur recta CD, erit ex nota centri grauitatis natura $AD = BD$, atque $GD = \frac{1}{3} CD$. Demittatur porro ex C ad AB perpendiculum CP, erit $AP = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB}$, hincque $DP = \frac{AB}{2} - AP = \frac{BC^2 - AC^2}{2 AB}$. Cum autem CP ſit parallela ipſi GQ erit $PQ = \frac{2}{3} DP$ vnde fiet $PQ = \frac{BC^2 - AC^2}{3 \cdot AB}$. Quamobrem erit $AQ = AP + PQ = \frac{3 AB^2 + AC^2 - BC^2}{6 \cdot AB}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

80. Ipſum ergo perpendiculum GQ ex centro grauitatis trianguli G in latus AB demiſſum erit tertia pars perpendicularis CP, ita vt ſit $GQ = \frac{1}{3} CP$.

Coroll. 2.

81. Si angulus ACB fuerit rectus, erit $AB^2 = AC^2 + BC^2$, hoc ergo caſu fiet $AQ = \frac{2 AC^2 + BC^2}{3 AB}$

$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} AB + \frac{AC^2}{3 \cdot AB}$. Atque cum ſit $CP = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ erit $GQ = \frac{AC \cdot BC}{3 \cdot AB}$.

Coroll. 3.

82. Si triangulum ACB fuerit iſoſceles, ita vt ſit $AC = BC$ erit $AQ = \frac{1}{2} AB$. Atque hoc caſu erit $GQ = \frac{1}{3} \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$.

LEMMA.

83. *Si a parallelogrammo rectangulo* ABDC *recta* EF *abſcindatur triangulum* EDF, *atque ex centro grauitatis* G *rectanguli totius* AD *in rectam* EF *perpendiculum* GH *demittatur, inuenire punctum* H.

Tab. V. fig. 4.

Solutio.

Ex centro grauitatis G rectanguli in latus BD demittatur perpendicularis GI ſecans rectam EF in K erit $DI = \frac{1}{2} BD$, et $EI = ED - \frac{1}{2} BD$, itemque $GI = \frac{1}{2} AB$. Iam ob triangula EIK, EDF ſimilia, erit $IK = \frac{DF \cdot EI}{DE} = DF - \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque $EK = \frac{EF \cdot EI}{DE} = EF - \frac{EF \cdot BD}{2 \cdot DE}$. Deinde habebitur $GK = \frac{1}{2} AB - KI = \frac{1}{2} AB - DF + \frac{DF \cdot BD}{2 DE}$, atque propter triangula GHK et EDF ſimilia iſta analogia $EF : DF = GK : KH$, ex qua ſequitur $KH = \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF} + \frac{DF^2 \cdot BD}{2 DE \cdot EF}$. Quocirca reperietur $EH = EF - \frac{BD \cdot DE}{2 EF} + \frac{AB \cdot DF}{2 EF} - \frac{DF^2}{EF}$, ſeu $EH = \frac{2 DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2 EF}$. Q. E. I.

Coroll.

84. Ex eorundem triangulorum GHK et EDF ſimilitudine ſequitur etiam fore $EF : ED = GK : GH$. Ex

hac

hac ergo analogia reperitur ipsa centri grauitatis G *a* recta EF distantia $= \frac{AB \cdot DE}{2EF} + \frac{BD \cdot DF}{2EF} - \frac{DE \cdot DF}{EF} = \frac{AB \cdot DE + BD \cdot DF - 2DE \cdot DF}{2EF}$.

PROPOSITIO II.

Problema.

Tab. V. fig. 4.

85. *Proposito parallelogrammo rectangulo homogeneo* ABDC, *cuius grauitas specifica sit ad aquam vt* p *ad* q, *inuenire casus, quibus hoc parallelogrammum rectangulum aquae ita insidere potest, vt solus angulus* D *immergatur.*

Solutio.

Sit EF sectio aquae quaesita, et EDF portio aquae immergenda, erit $\frac{1}{2}$DE.DF : AB.BD $= p : q$; atque recta jungens centra grauitatis totius rectanguli, et partis EDF normalis esse debet in sectionem aquae EF. Quare normales ex centro grauitatis rectanguli, et centro grauitatis trianguli EDF in idem rectae EF punctum incidere debebunt. Quare per 83. et 81 erit $\frac{2DE^2 + AB \cdot DF - BD \cdot DE}{2EF} = \frac{2DE^2 + DF^2}{3EF}$. Positis nunc AB $=$ CD $= a$, AC $=$ BD $= b$, DF $= x$ et DE $= y$, erit $qyx = 2pab$ seu $y = \frac{2pab}{qx}$, atque $2y^2 + 3ax - 3by = 2x^2$, quae si loco y eius valor $\frac{2pab}{qx}$ substituatur abit in hanc $2qqx^4 - 3qqax^3 + 6pqab^2x - 8p^2a^2b^2 = 0$. Ex qua aequatione inuenietur valor ipsius x, ex eoque valor ipsius y. Q. E. I.

Coroll. 1.

86. Aequatio haec ad summum tres habere potest radices affirmatiuas reales, quarum autem ea tantum quaesito

ſito ſatisfaciunt, quae pro x valores dant ipſo a minores, et quibus ſimul valores ipſius y reſpondent ipſo b minores.

Coroll. 2.

87. Cum triangulum EDF dimidium rectanguli excedere nequeat, perſpicuum eſt rationem q ad p minorem dupla eſſe non poſſe, ita vt eſſe debeat vel $\frac{q}{p} = 2$ vel $\frac{q}{p} > 2$.

Exemplum.

88. Si rectangulum abeat in quadratum vt ſit $b = a$, habebitur iſta aequatio $2q^2x^4 - 3qqax^3 + 6pqa^3x - 8ppa^4 = 0$, quae diuiſione reſoluitur in has duas I. $qx^2 - 2pa^2 = 0$ et II. $2qx^2 - 3qax + 4pa^2 = 0$. Harum aequationum illa dat $x = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, cui reſpondet $y = a\sqrt{\frac{2p}{q}}$, quo ergo caſu x et y ſunt aequales, et ſectio aquae EF ſit parallela diagonali BC. Ex altera aequatione eruitur duplex valor ipſius $x = \frac{3a}{4} \pm a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$, cui quoque iſte duplex valor ipſius y reſpondet, ſcilicet $y = \frac{3a}{4} \mp a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})}$. Ne igitur hi valores fiant imaginarii oportet ſit $\frac{2p}{q} < \frac{9}{16}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{9}{32}$. Deinde ne excedant latus a oportet ſit $a\sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{2p}{q})} < \frac{a}{4}$ ſeu $\frac{q}{p} > \frac{1}{4}$. Quare ſi $\frac{p}{q}$ contineatur inter hos limites $\frac{8}{32}$ et $\frac{9}{32}$ tres caſus dantur, quibus quadratum aquae ita inſidere poteſt, vt ſolus angulus D aquae immergatur.

Scholion.

89. Eadem ſolutio parumper immutata etiam huic problemati ſatisfaciet, quo quaeruntur caſus, quibus paralle-

rallelogrammum rectangulum aquae ita insidere queat, vt tres anguli B, A, C sub aquam mergantur, solusque angulus D emineat. Hoc enim casu pariter vt ante positio rectae EF inueniri debet, in quam recta iungens centra grauitatis rectanguli AD et trianguli EDF sit normalis. Hoc tantum differt istud problema a praecedente, quod hic area ABEFC ad totum rectangulum rationem habere debeat p ad q. Cum ergo hoc casu ratio areae trianguli EDF ad rectangulum totum esse debeat vt $q-p$ ad q, solutio praecedens ad hunc casum accommodabitur ponendo $q-p$ loco p. Manentibus igitur ceteris denominationibus vt ante, erit $2qqx^4 - 3qqax^3 + 6(q-p)qab^2x - 8(q-p)^2a^2b^2 = 0$, ex qua valori ipsius x inuento respondet valor ipsius $y = \frac{2(q-p)ab}{qx}$. Si rectangulum abeat in quadratum eadem valebunt, quae in exemplo sunt inventa, si modo loco p ponatur $q-p$. Ita quadratum tribus diuersis modis aquae ita poterit innatare, vt solus angulus D extra aquam emineat, si $\frac{p}{q}$ contineatur intra hos limites $\frac{24}{32}$ et $\frac{23}{32}$

LEMMA.

Tab. VI. Fig. 1.

90. *Dato trapezio* ABDC, *in quo latera* AC *et* BD *sint inter se parallela, atque ad basin* CD *normalia, inuenire punctum* H, *in quo recta* GH *per centrum grauitatis trapezii* G *ducta in latus* AB *normaliter incidit.*

Solutio.

Producantur tum latus AB tum basis CD, donec concurrant in I et ex vtriusque trianguli ACI et BDI cen-

centris grauitatis concipiantur perpendicula in AI demissa. Iam ex staticis constat fore momentum trapezii respectu puncti I aequale differentiae momentorum triangulorum. Momentum autem figurae respectu I obtinetur, si area multiplicetur in distantiam puncti, in quo perpendiculum ex eius centro grauitatis in AI demissum in AI incidit, *a* puncto I. Ita momentum trapezii erit $= ABDC.IH$, atque per 81. erit momentum trianguli $ACI = \frac{ACI(2CI^2 + AC^2)}{3AI}$ atque momentum trianguli $BDI = \frac{BDI(2DI^2 + BD^2)}{3BI}$ Quamobrem habebitur ista aequatio $ABDC. IH = \frac{ACI(2CI^2 + AC^2)}{3AI} - \frac{BD(2DI^2 + BD^2)}{3BI}$ ex qua punctum H determinabitur. Ponantur ergo $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$, et $CD = \surd(a^2 - (b-c)^2) = d$, eritque $AI = \frac{ab}{b-c}$; $BI = \frac{ac}{b-c}$; $CI = \frac{bd}{b-c}$ atque $DI = \frac{cd}{b-c}$. Ex his prodibit $ABDC = \frac{(b+c)d}{2}$; $ACI = \frac{bbd}{2(b-c)}$ et $BDI = \frac{ccd}{2(b-c)}$. Iam ponatur $AH = x$. erit $HI = \frac{ab}{b-c} - x$, quibus valoribus substitutis obtinebitur tandem $AH = x = \frac{a^2(b+2c) + b^3 - c^3}{3a(b+c)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

91. Simili modo ipsum perpendiculum GH ope momentorum poterit determinari, prodibit autem calculo ad finem perducto $GH = \frac{d(b^3 - c^3)}{3a(bb-cc)} = \frac{d(bb + bc + cc)}{3a(b+c)}$.

Coroll. 2.

92. Si fuerit $AC = BD$ seu $c = b$, quo casu trapezium mutatur in parallelogrammum rectangulum, prodibit $AH = \frac{a}{2}$, et $GH = \frac{bd}{2a} = \frac{b}{2}$ propter $d = a$ hoc casu.

PRO-

PROPOSITIO. 12.

Problema.

93. *Determinare casus, quibus parallelogrammum rectangulum* ABDC *homogeneum, cuius grauitas specifica ad aquam sit vt* p *ad* q, *aquae ita insidere potest, vt duo anguli* C *et* D *sub aqua, reliqui vero* A *et* B *extra aquam versentur.*

Solutio.

Sit EF sectio aquae, quae quaestioni satisfaciat, oportet primo vt sit $\frac{CE + DF}{2} : AC = p : q$. Deinde requiritur vt recta iungens centra grauitatis totius rectanguli et portionis ECDF in EF sit normalis, id quod eueniet, si perpendicula ex vtriusque trapezii ECDF et EABF centris grauitatis in EF demissa coincidant. Per lemma igitur praemissum obtinebitur ista aequatio $\frac{EF^2(CE + 2DF) + CE^3 - DF^3}{3EF(CE + DF)} = \frac{EF^2(CAE + 2BF) + AE^3 - BF^3}{3EF(AE + BF)}$. Ponantur ergo $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $CE = x$, $DF = y$, erit $AE = b - x$, $BF = b - y$, et $EF^2 = a^2 + x^2 - 2xy + y^2$. Iam propter primam conditionem fit $\frac{x + y}{2} : b = p : q$ seu $x + y = \frac{2bp}{p}$ altera vero conditio hanc suppeditat aequationem $\frac{(a^2 + (x-y)^2)(x + 2y) + x^3 - y^3}{x + y} = \frac{(a^2 + (x-y)^2)(2b - x - 2y) + (b - x)^3 - (b - y)}{2b - x - y}$

Quae aequatio per diuisionem reducitur ad has duas $x = y$ et $a^2 + 2(y^2 + yx + xx) = 3b(y + x)$. Cum autem sit $y = \frac{2bp}{q}$ dabit prior aequatio $x = y = \frac{bp}{q}$ posterior vero $-x\,2qqxx - 4pqbx + 8p^2b^2 - 6pqb^2 + q^2a^2 = 0$, ex qua aequatione eruitur valor ipsius $x = \frac{pb}{q} \pm \sqrt{(\frac{3pb^2}{q} - \frac{3p^2b^2}{q2} - \frac{a^2}{2})}$ eritque $y = \frac{pb}{q} \mp \sqrt{(\frac{3pb^2}{q^2} - \frac{3ppb^2}{q^2} - \frac{a^2}{2})}$. Q.E.I.

Co.

Coroll. 1.

94. Primus ergo caſus, quo $x = y = \frac{pb}{q}$ ſemper locum habet, dummodo fuerit rectangulum grauitate ſpecifice leuius quam aqua ſeu $p < q$. Tum autem ſectio aquae erit EF parallela lateribus AB et CD.

Tab. VI. fig. 3.

Coroll. 2.

95. Haec igitur ſola ſolutio quatuor exhibet caſus, quibus rectangulum homogeneum aquae innatare poteſt. Quodlibet enim latus per eam in aqua ſitum horizontalem prout CD tenere poterit.

Coroll. 3.

96. Duo autem reliqui caſus non ſemper locum habere poſſunt. Quo enim exiſtere queant requiritur, vt primo ſint reales, deinde vt ſint affirmatiui et tertio vt ſint minor quam latus b.

Tab. VI. fig. 2.

Coroll. 4.

97. Hi vero pro x et y inuenti valores, quo ſint reales requiritur vt ſit $a^2 < \frac{6pb^2}{q} - \frac{6p^2b^2}{q^2}$ hoc eſt vt ſit $\frac{a}{b} < \sqrt{(\frac{6pq - 6pp}{qq})}$. Deinde quo ſint affirmatiui neceſſe eſt vt ſit $a^2 > \frac{6pqb^2 - 8p^2b^2}{q^2}$ ſeu $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{(6pq - 8pp)}{qq}}$. Tertio vero quo ſint latere b minores oportet vt ſit $a^2 > \frac{10pb^2}{q} - \frac{8p^2b^2}{q^2} - 2b^2$ ſeu $\frac{a}{b} > \sqrt{(\frac{10pq - 8pp - 2qq}{qq})}$.

Coroll. 5.

98. Si fuerit rectangulum duplo leuius quam aqua, vt ſit $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$; quo poſteriores caſus fiant reales oportet

 ſit

ſit $\frac{a}{b} < \frac{\sqrt{6}}{2}$ atque $\frac{a}{b} > I$ et tertio $\frac{a}{b} > I$. Requiritur. itaque vt $\frac{a}{b}$ contineatur inter limites 1 et $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Coroll. 6.

99. Si fuerit $p : q = 3 : 4$; quo rectangulum poſteriore ratione aquae inſidere queat, oportet vt ſit primo $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, ſecundo $\frac{a}{b} > 0$ et tertio $\frac{a}{b} > 1$. Quare neceſſe eſt vt $\frac{a^2}{b^2}$ contineatur intra limites $\frac{8}{8}$ et $\frac{9}{8}$.

Coroll. 7.

100. Si fuerit $p : q = 1 : 4$, ne poſteriores aquae innatandi modi fiant inutiles neceſſe eſt vt ſit $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{9}{8}}$, atque $\frac{a}{b} > 1$ nec non $\frac{a}{b} > 0$. Quare limites erunt 1 et $\sqrt{\frac{9}{8}}$ vt ſupra.

Scholion.

101. Quod in his duobus caſibus poſterioribus limites ſint iidem, mirandum non eſt. Nam ſi EF eſt ſectio aquae pro parte ſubmerſa ECDF, quoque ſectio aquae eſſe poterit pro parte ſubmerſa EABF; hicque caſus locum habet ſi grauitas ſpecifica rectanguli ad aquam fuerit vt $q-p$ ad q. Atque ſi in limitibus pro $\frac{a}{b}$ datis ponatur $q-p$ loco p, primus omnino non mutatur, ſecundus vero et tertius commutantur, adeo vt ſemper pro vtroque caſu iidem limites prodire debeant.

Exemplum.

Tab VII. fig. 1.

102. Abeat rectangulum in quadratum ABDC et quaeratur, quo modo eius grauitas ſpecifica comparata eſſe debeat, vt quadratum plurimis diuerſis modis aquae inſidere

ſidere queat. Quia ergo eſt $b = a$, fiet primo $x = y = \frac{pa}{q}$ deinde $x = \frac{p}{q}a \pm a\surd(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})$ atque $y = \frac{p}{q}a \mp a\surd(\frac{3p}{q} - \frac{3pp}{qq} - \frac{1}{2})$, quae poſteriores expreſſiones, quo fiant reales et vtiles, oportet vt primo $\frac{q}{p}$ contineatur intra limites $3+\surd 3$ et $3-\surd 3$. Deinde opus eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 4$ vel $\frac{q}{p} < 2$. Tertio vero neceſſe eſt vt ſit vel $\frac{q}{p} > 2$ vel $\frac{q}{p} < \frac{4}{3}$. Quare caſus hi fient reales ſi $\frac{q}{p}$ vel intra hos limites $3+\surd 3$ et 4 vel intra hos $3-\surd 3$ et $\frac{4}{3}$ contineatur. Deinceps etiam hoc quadratum priore caſu aquae inſidere poteſt, vt vnicus angulus ſub aqua, altero vero vt tres ſub aqua exiſtant (88, 89), hocque vno ſaltem modo, duo enim reliqui ibi expoſiti requirunt vt $\frac{q}{p}$ vel contineatur intra limites 4 et $\frac{32}{9}$, vel intra limites $\frac{4}{3}$ et $\frac{32}{23}$, qui ergo limites ab illis excluduntur. Quare ſi $\frac{q}{p}$ contineatur vel intra limites $3+\surd 3$ et $\frac{23}{9}$, vel intra limites $3-\surd 3$ et $\frac{32}{23}$, tum quadratum tam per hanc, quam praecendentem propoſitionem 16 diuerſis modis aquae inſidere poterit. Sit ergo $p : q = 1 : 4$, erunt ſedecim ſectiones aquae, quibus quadratum aquae inſidere poteſt, prout in figura ſunt expreſſae per ef quae eaedem ſectiones quoque valent pro quadrato cuius grauitas ſpecifica ad aquam eſt vt 3 ad 4. Niſi autem grauitas ſpecifica intra dictas rationes contineatur, tum octo tantum modis quadratum aquae inſidere poterit.

Scholion.

103. Quae igitur hic de diuerſis modis, quibus vel triangula vel parallelogramma rectangula homogenea aquae inſidere poſſunt, tradidimus, ea quoque pertinent ad

 priſmata

prismata homogenea, quarum sectiones sunt vel triangula vel rectangula vti supra monstrauimus. Tot scilicet modis huiusmodi prismata, dum eorum axes manent in situ horizontali, aquae insidere poterunt, quot tum pro triangulis tum rectangulis in his propositionibus assignauimus. Hi autem vtique non sunt omnes casus, quibus prismata aquae innatare possunt, nam praeter hos pluribus quoque aliis modis aquae insidere poterunt, dum eorum axes vel sint verticales vel ad horizontem oblique positi, quemadmodum ex allatis facile colligere licet. His autem vlterius persequendis contra nostrum esset institutum, vt immoraremur.

Definitio.

104. Planum diametrale voco planum, quo corpus in duas partes similes et aequales diuiditur ita vt omnes sectiones corporis, quae fiunt planis ad planum diametrale normalibus, ab hoc plano diametrali diuidantur in duas partes similes et aequales.

Corollarium.

105. Corporis igitur plano diametrali praediti centrum magnitudinis incidit in ipsum planum diametrale, cum ex vtraque eius parte corpus sit sibi simile et aequale.

Scholion.

106. Corpora, quae habent planum diametrale, prae ceteris merentur, quae examini subiiciantur; omnia enim corpora quae ad natandum in aqua adhibentur, ita sunt comparata, vt planum diametrale admittant. Sic in omni-

omnibus nauibus planum verticale per ſpinam tranſiens habebit hanc proprietatem, vt naues in duas partes ſimiles et aequales diuidat. Quod autem omnes naues hoc modo fabricentur ratio in promtu eſt, cum nulla ſit ratio, cur ex vna parte aliam habeant figuram, quam ex altera. Quamobrem ad figuram nauium aptiſſimam determinandam ſufficit alteram medietatem circa planum diametrale aſſignaſſe, quippe cui altera pars ſimilis et aequalis conſtitui debet.

PROPOSITIO 13.
Problema.

107. *Corpus, quod plano diametrali eſt praeditum, aquae ſemper ita innatare poteſt, vt planum diametrale ſit verticale, ſi modo corporis centrum grauitatis in planum diametrale cadat.*

Demonſtratio.

Sit corpus huiusmodi aquae ita impoſitum, vt planum diametrale teneat ſitum verticalem, erit ſectio aquae normalis ad planum verticale, ideoque pars aquae ſubmerſa a plano diametrali in duas partes ſimiles et aequales diuidetur. Quamobrem huius partis ſubmerſae centrum magnitudinis cadet in planum diametrale, in quod etiam centrum grauitatis totius corporis cadere ponitur. Conſequenter corpus ita inclinando, vt planum diametrale maneat verticale, effici poteſt, vt recta iungens centra grauitatis et magnitudinis fiat verticalis, quo ergo caſu corpus aquae innatabit. Q. E. D.

 Scholion

Scholion 1.

108. Huiusmodi ſitu, quo planum diametrale eſt verticale, videmus omnis generis naues aquae inſidere, niſi a viribus alienis ex hoc ſitu declinentur. Atque tum in conſtruendis tum onerandis nauibus in id potiſſimum eſt incumbendum, vt centrum grauitatis in planum diametrale cadat, quo naues hoc ſitu deſcripto aquae innatare queant.

Scholion 2.

109. Expoſita igitur ſunt in hoc capite principia quibus ſtatus aequilibrii corporum aquae innatantium nititur, atque ſimul methodus eſt tradita, cuius ope pro quibuscunque corporibus propoſitis ſitus, quibus aquae inſidere poſſunt, determinare licet. Corpora autem hic ſumus contemplati omnino libera, quae a nullis viribus externis ſunt ſollicitata, ſed a ſolis viribus tum grauitatis tum preſſionum aquae in aequilibrium conſtituuntur; in ſequentibus autem tam ad motum quam aequilibrium corporum, quae vel non ſunt libera vel a viribus externis ſollicitantur determinandum progrediemur. Nunc autem ad caput ſecundum pergimus, in quo inueſtigabimus motum, quo corpus non in aequilibrio conſtitutum, ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituit. In hoc ſcilicet capite conſiderabimus corpora aquae ita impoſita, vt vel non debita pars aquae ſit immerſa, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non ſit verticalis, et inquiremus, quomodo ex hoc ſitu in ſtatum aequilibrii ſe recipiant. Cum autem corpus aquae non ita imponi queat, quin e veſtigio in ſtatum aequilibrii collocetur, eiusmodi caſus hic examinandi venient, quibus corpus ab externa vi ex aequilibrio eſt depulſum, et ceſſante ea vi in ſtatum aequilibrii reuertitur.

Caput

Caput Secundum

DE CORPORVM AQVAE INNATANTIVM RESTITVTIONE IN AEQVILIBRIVM.

PROPOSITIO 14.

Theorema.

110.

Vt corpus aquae ita insidat, vt vel non tanta eius pars aquae sit immersa quanta ad aequilibrium requiritur, vel recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non fuerit verticalis, tum corpus mouebitur donec in statum aequilibrii peruenerit.

Demonstratio.

Sit enim primo non tanta pars aquae submersa, quanta ad aequilibrium requiritur, manifestum est vires grauitatis et pressionum aquae fore inaequales, ideoque sese mutuo non destruere. Quare corpus tum mouebitur vel ascendendo vel descendendo, donec in aequilibrii situm perueniat. At si recta iungens centra grauitatis et magnitudinis non sit verticalis, vires grauitatis et pressionum aquae, etiamsi fuerint aequales, tamen non directe sibi erunt oppositae. Cum igitur etiam hoc casu vires, quibus corpus sollicitatur se non destruant, necesse est vt motum gyratorium in corpore producant, qui tam diu durabit, donec corpus in aequilibrium fuerit constitutum. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. 1.

111. Si igitur corpus vi externa ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum, tum ceſſante hac vi moueri incipiet, donec in ſitum aequilibrii peruenerit.

Coroll. 2.

112. Si ergo daretur corpus, quod ita eſſet comparatum, vt nullum ſitum aequilibrii admitteret, tum hoc corpus aquae impoſitum perpetuo moueri deberet, atque perpetuum mobile verum repraeſentaret.

Coroll. 3.

113. Cum igitur huiusmodi mobile perpetuum contradictionem inuoluat, ſequitur omne corpus ſaltem vnicum habere debere ſitum, in quo in aequilibrio eſſe queat.

Coroll. 4.

114. Quia corpus dum ſe reſtituit in aqua moueri debet, patietur quoque ab aqua reſiſtentiam, quae eo maior erit, quo maior fuerit celeritas corporis contra aquam. Motum autem reſiſtentia prorſus impedire non poteſt cum motus tardiſſimos non amplius afficiat.

Coroll. 5.

115. Interim tamen hoc certum eſt, corpus ſe non tam cito reſtituere poſſe, quam ſi aqua nulla prorſus reſiſtentia reluctaretur. Eo tardius igitur corpus ſe reſtituet, quo maior ſuperanda fuerit reſiſtentia.

Scholion

Scholion.

116. In hoc ergo capite inquirendum nobis erit, cuiusmodi motus in corpore, quod a potentiis ſeſe non deſtruentibus ſollicitatur, generetur. Ad hoc autem praeſtandum pluribus opus eſt propoſitionibus ex mechanica petendis, circa effectum potentiarum in corpora finita. Qua de re cum vix quicquam adhuc certi ſit traditum, neceſſe eſt vt principia ad hoc neceſſaria ex ipſis mechanicae fontibus hauriamus. In ſequentibus igitur lemmatis inueſtigabimus, cuiusmodi motum quaecunque potentiae corpus ſollicitantes producere debeant; haecque principia, quae hic ſtabiliemus, non ſolum in hoc capite, ſed etiam in omnibus ſequentibus tantae ſunt neceſſitatis, vt iis nullo modo carere queamus.

LEMMA.

Tab. VII. fig. 2.

117. *Si plura fuerint corpora* A, B, C, D *quae ſingula in directionibus parallelis promota perueniant in* a, b, c, d; *tum eorum commune centrum grauitatis* O *in directione quoque parallela* Oo *mouebitur, et perueniet in* o *vt ſit* Oo $= \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A+B+C+D}$ *denotantibus* A, B, C, D *maſſas corporum reſpectiue.*

Demonſtratio.

Producantur directiones Aa, Bb, Cc, Dd, donec rectae Zδ pro lubitu aſſumtae occurant in punctis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et recta ex centro grauitatis O in ω. Erit ergo ex nota centri grauitatis proprietate $Z\omega = \frac{A.Z\alpha + B.Z\beta + C.Z\gamma + D.Z\delta}{A+B+C+D}$ ex qua aequatione intelligitur, punctum ω fore veſtigium centri grauitatis tam dum corpora in A, B, C, D quam dum in a, b, c, d ſunt ſita, quare directio, in qua cen-

centrum grauitatis mouetur, erit parallela directionibus corporum. Deinde vero corporibus in A, B, C, D existentibus erit $O\omega = \frac{A.A\alpha + B.B\beta + C.C\gamma + D.D\delta}{A + B + C + D}$ Translatis autem corporibus in a, b, c, d, perueniat centrum grauitatis in o, erit per eandem centri grauitatis proprietatem $o\omega = \frac{A.a\alpha + B.b\beta + C.c\gamma + D.d\delta}{A + B + C + D}$. Cum iam sit $Oo = o\omega - O\omega$, erit $Oo = \frac{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}{A + B + C + D}$. Q. E. D.

Coroll.

181. Quantuscunque ergo sit corporum numerus demonstratio data aeque valet, ac pro casu quatuor corporum tantum. Atque ex demonstratione quoque intelligitur, eam pariter vim suam retinere siue corpora sint in eodem plano sita siue secus.

LEMMA.

Tab. VII. fig. 2.

119. *Si fuerint corporibus* A, B, C, D *potentiae* a, b, c, d *respectiue applicatae, quarum directiones inter se sint parallelae, corporaque ab iis moueantur, tum eorum commune centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur, ac si omnia corpora in ipso grauitatis centro* O *essent concentrata eorumque summa* A + B + C + D *a summa potentiarum* a + b + c + d *in eadem directione sollicitaretur.*

Demonstratio.

Promoueantur puncto temporis dt corpora A, B, C, D a potentiis respectiuis a, b, c, d per elementa Aa, Bb, Cc, Dd, erit per nota mechanicae principia $Aa = \frac{a.dt}{A}$, $Bb = \frac{b.dt}{B}$, $Cc = \frac{c.dt}{C}$, $Dd = \frac{d.dt}{D}$. Interim igitur

igitur per lemma praecedens perueniet centrum grauitatis O in o, vt ſit Oo parallela directionibus potentiarum, atque $Oo = \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. At ſi in O concentrata eſſet ſumma corporum $A+B+C+D$, eaque in directione Oo ſollicitaretur a ſumma potentiarum $a+b+c+d$, tum tempuſculo dt perueniret quoque in o vt eſſet $Oo = \frac{dt(a+b+c+d)}{A+B+C+D}$. Quare dum corpora ſingula A, B, C, D, a ſuis potentiis reſpectiuis a, b, c, d in directionibus inter ſe parallelis vrgentur, centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi ſumma corporum in O concentrata ſollicitaretur a ſumma potentiarum $a+b+c+d$ in eadem directione. Q. E. D.

Corollarium.

120. Haec igitur demonſtratio aeque ſuccedit, ſiue corpora ſint in eodem plano poſita, ſiue ſecus dummodo potentiarum, quibus ſingula ſollicitantur, directiones ſint inter ſe parallelae.

LEMMA.

121. *Si corpora* A, B, C, D *ſollicitentur* a *quibus, cunque potentiis, ab iisque moueantur, tum eorum centrum grauitatis* O *eodem modo mouebitur ac ſi in eo omnium corporum maſſae eſſent concentratae, eorumque aggregato applicatae eſſent omnes potentiae quaeque in directione parallela ei, in qua ſingula corpora, ſollicitantur.*

Tab. VII. fig. 3.

Demonſtratio.

Sumantur pro lubitu tres directiones fixae ZP, ZQ, ZR inter ſe normales, et quaelibet potentia, qui-

 bus

bus corpora A, B, C, D ſollicitantur, reſoluatur in ternas, quarum directiones reſpectiue ſint parallelae directionibus ZP, ZQ, ZR. Ponatur ſumma omnium potentiarum ex hac reſolutione ortarum, quarum directiones ſunt ipſi ZP parallelae = P, ſumma earum quae ipſi ZQ ſunt parallelae = Q, earumque ſumma quae ipſi ZR ſunt parallelae = R. Iam ſi ſingula corpora tantum ab iis potentiis ſollicitarentur, quarum directiones ipſi ZP ſunt parallelae, tum centrum grauitatis O eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia P in directionem O*p* ipſi ZP parallela ſollicitaretur. Simili modo ſi ſingula corpora a potentiis tantum ſollicitarentur quarum directiones ſunt ipſi ZQ parallelae tum centrum grauitatis eodem modo moueretur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia Q, cuius directio O*q* quoque ipſi ZQ eſt parallela, vrgeretur. Denique eodem modo ſi ſingula corpora tantum a potentiis, quarum directiones ipſi ZR ſunt parallelae, ſollicitarentur, tum centrum grauitatis *o* eodem modo mouebitur, ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D a potentia R in directione O*r* ipſi ZR parallela ſollicitaretur. Quare ſi ſingula corpora *ab* omnibus potentiis, quae ipſis ſunt applicatae ſimul ſollicitentur, tum centrum grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo ſumma corporum A + B + C + D eſſet concentrata, eaque a tribus potentiis P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* ſollicitaretur. At ſi omnes potentiae, quibus ſingula corpora ſollicitantur, in directionibus ſibi parallelis in puncto O eſſent applicatae, tum iis omnibus tres potentiae P, Q, R in directionibus O*p*, O*q*, O*r* aequiualerent. Quamobrem centrum gra-

grauitatis O eodem modo mouebitur ac ſi in eo omnia corpora eſſent concentrata, iisque omnes potentiae in iisdem directionibus eſſent applicatae. Q. E. D.

LEMMA.

122. *Si corpori rigido, cuius partes firmiſſimo nexu inter ſe cohaerent, quaecunque potentiae fuerint applicatae, eius centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eique omnes potentiae in ſuis directionibus coniunctim applicatae.*

Demonſtratio.

Concipiantur ad momentum omnes corporis particulae a ſe inuicem diſſolutae, vt earum quaeque libere a potentiis moueantur, tum ex lemmate praecedentee conſtat centrum grauitatis corporis eodem modo moueri, ac ſi in eo tota corporis maſſa eſſet concentrata, eaque ab omnibus potentiis in iisdem reſpectiue directionibus coniunctim vrgeretur. Cum autem interea ſingulae corporis particulae ex mutuo ſitu, quem inter ſe tenere debent, ſint dislocatae, concipiantur eae ſeſe in debitum ordinem reſtituere, viribus, quibus ſe mutuo attrahant vel repellant. Huiusmodi autem actionibus quibus corpora in ſe mutuo agunt, locus centri grauitatis non mutatur. Quamobrem poſt reſtitutionem centrum grauitatis inuariatum manebit, atque idcirca eodem modo mouebitur ac ſi ſingulae corporis particulae a ſe inuicem eſſent diſſolutae. Mutuus igitur nexus quo corporis particulae inter ſe cohaerent, motum centri grauitatis aſſignatum non turbat. Q. E. D.

 Coroll.

Coroll. 1.

123. Si igitur potentiae, quibus corpus ſollicitatur ita fuerint comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſe mutuo deſtruant et in aequilibrio conſiſtant, tum centrum grauitatis corporis quiescet.

Coroll. 2.

124. At ſi potentiae corpori applicatae non fuerint ita comparatae, vt, ſi omnes eidem puncto applicentur, ſint in aequilibrio, tum centrum grauitatis corporis in media earum potentiarum directione mouebitur.

Coroll. 3.

Tab. VII. fig. 4.

125. Si igitur corpori ABC duae potentiae Ee et Ff, quarum altera deorſum altera ſurſum vrgeat, fuerint applicatae, tum centrum grauitatis quieſcet ſi fuerit $Ee = Ff$. At ſi $Ee > Ff$ centrum grauitatis deſcendet, aſcendet vero ſi fuerint $Ee < Ff$.

Coroll. 4.

126. Quaecunquae ergo potentiae corpori fuerint applicatae, motus centri grauitatis per hoc lemma poterit determinari.

Scholion.

127. Motus autem, quem potentiae centro grauitatis inducunt, non eſt ſolus effectus quem potentiae in corpore producunt, neque ad effectum potentiarum corpori applicatarum ſufficit motum centri grauitatis noſſe.

Inte-

Interea enim dum centrum grauitatis vel quiescit, vel descripto modo mouetur, fieri potest, vt reliquae corporis partes circa centrum grauitatis reuoluantur, motumque gyratorium accipiant, quippe quo motu centri grauitatis motus non turbatur. Quamobrem superest, vt investigemus cuiusmodi motum gyratorium quaevis potentiae corpori applicatae circa centrum grauitatis producant, hoc enim cognito integer effectus, quem potentiae in corporibus rigidis edere possunt, innotescet.

LEMMA.

128. *Si corpori rigido quaecunque potentiae fuerint applicatae, idque ab iis moueatur ita ut centrum grauitatis eum obtineat motum, quem ipsi assignauimus, totum corpus interea circa centrum grauitatis pariter mouebitur, ac si centrum grauitatis quiesceret vel fixum esset.*

Demonstratio.

Concipiatur corpori in ipso centro grauitatis potentia noua applicata aequalis et contraria ei quae oritur ex compositione omnium potentiarum si essent in centro gravitatis applicatae, tum igitur centrum grauitatis quiescet. Si nunc hoc casu determinetur motus, quem potentiae corpori circa centrum grauitatis inducunt, potentia noua, quam corpori in centro grauitatis applicatam concipimus, motum hunc circa centrum grauitatis non afficiet. Quare etiamsi, ea iterum auferatur, motus circa centrum grauitatis immutatus manebit. Hanc ob rem corpus, circa centrum grauitatis motum eodem modo mouebitur, ac si esset fixum. Q. E. D.

Coroll.

Corollarium.

129. Ad motum igitur corporis circa centrum gravitatis determinandum, licebit centrum grauitatis tanquam fixum considerare, cum motus gyratorius circa centrum grauitatis motum conueniat cum motu gyratorio circa centrum grauitatis fixum.

Scholion.

130. Quo ergo determinemus hunc circa centrum grauitatis motum, incipiemus a motu circa quodcumque punctum fixum definiendo, atque inuestigabimus motum gyratorium, quem quaecunque potentiae corpori ex quopiam puncto fixo suspenso inducere valent. Hoc enim determinato facile erit punctum fixum in ipsum centrum grauitatis transferre atque adeo motum, quem potentiae quaecunque corpori applicatae circa centrum grauitatis generant assignare.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 1.

131. *Si corpusculum* C *circa punctum fixum* O *mobile sollicitetur a potentia* CF, *erit angulus dato tempusculo* dt *circa* O *genitus directe vt iactum ex potentia* CF *in sin. ang.* FCO *per* dt *multiplicatum et reciproce vt massa corpusculi* C *in distantiam* CO *ducta.*

Demonstratio.

Positis potentia $CF = p$ et sin. ang. $FCO = m$, resoluatur potentia CF in duas laterales secundum Cf normalem ad CO et $C\varphi$ ipsam CO, quarum posterior tota in tendendo filo CO vel immutanda corpusculi a C dis-

tantia consumetur, ideoque ad motum nihil praestat. Altera vero potentia in directione Cf, quae erit $= mp$, tota in motu producendo impendetur. Perducatur igitur corpusculum C tempusculo dt per spatiolum Cc, erit $Cc = \frac{mpdt}{C}$. Hoc vero spatiolum per distantiam CO diuisum dabit angulum COc tempusculo dt genitum qui consequenter erit $= \frac{mpdt}{C.CO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

132. Si ergo huic angulo, qui dato tempusculo generatur, vis gyratoria proportionalis ponatur, erit vis gyratoria vt potentia CF in sin. ang. FCO diuisa per corpus C in distantiam CO.

Coroll. 2.

132. Si igitur vis gyratoria perpetuo ista ratione exprimatur, tum statim cognoscetur motus angularis. Expressio enim talis vis gyratoriae per tempusculum dt multiplicata exhibet statim angulum hoc tempusculo genitum circa O.

Coroll. 3.

134. Atque si vis gyratoria compositi cuiusque corporis hoc modo expressa inueniatur, tum statim angularis motus congnoscetur, seu quod idem est, assignari potest corpus solitarium vt C, quod a certa potentia sollicitatum aequalem motum gyratorium habeat.

Scholion.

135. Cum potentia oblique corpusculum C trahens tam facile ad potentiam normalem ad CO reducatur,

 atque

atque altera potentia, cuius directio in ipſam CO incidit, motum gyratorium non afficiat; in ſequentibus, vbi motus gyratorius determinari debet, tantum potentias normales cuique corporis particulae applicatas concipiemus. Et quidem ſi C fuerit particula corporis circa O mobilis, ex hoc lemmate iam conſtat, ſi ſola particula C adeſſet, reliquis corporis partibus omnibus annihilatis, qualem motum gyratorium potentia Cf normalis ad CO corpuſculo C induceret. Scilicet corpuſculum C ad circulum deſcribendum incitabitur, cuius centrum eſt in O et radius AO, atque iſte circulus ſitus erit in plano, in quo ſitae ſunt cum recta CO tum potentiae ſollicitantis Cf directio. Vis autem qua ad hunc circulum deſcribendum incitatur, ſeu vis gyratoria, prout eam vocabimus, erit aequalis potentiae Cf diuiſae per factum ex maſſa corpuſculi C in diſtantiam CO.

LEMMA.

Tab. VIII. fig. 2.

136. *Loco corporis* A *a potentia* Aa *circa* O *ad motum gyratorium incitati, ſubſtitui poteſt in diſtantia* MO, *quae in eodem plano, in quo* AO *et* Aa, *ſita eſt, corpus* $M = \frac{A.AO^2}{MO^2}$, *quod a potentia* $Mm = \frac{MO.\,Aa}{MO}$, *cuius directio in eodem plano eſt ſita et in eandem, in quam* Aa *plagam tendit, ad motum gyratorium circa* O *ſollicitetur.*

Demonſtratio.

Quo loco potentiae Aa in diſtantia AO applicatae ſubſtitui queat potentia Mm in diſtantia MO applicata, oportet vt primo MO et Mm in eodem plano ſint ſitae, in quo ſunt AO et Aa; deinde vero requiritur vt mo-

momenta potentiarum A*a* et M*m* ſint aequalia, vnde ſequitur fore $Aa.AO = Mm.MO$ ſeu $Mm = \frac{Aa.AO}{MO}$. Hoc enim pacto potentia M*m* eundem praeſtabit effectum circa O, quem habet potentia A*a* circa O. Praeterea vero corpus in M collocandum tantum eſſe debet, vt vires gyratoriae in M et A circa O ſint aequales, quod eueniet, ſi fuerit $\frac{Mm}{M.MO} = \frac{Aa}{A.AO}$. Quo ergo et vis gyratoria vtrinque ſit eadem, neceſſe eſt vt ſit $M = \frac{A.AO.Mm}{MO.Aa} = \frac{A.AO^2}{MO^2}$ propter $Mm = \frac{Aa.AO}{MO}$. Q. E. D.

Coroll. 1.

137. Perinde igitur eſt in qua directione aſſumatur recta MO, modo ea in eodem plano ſit ſita, in quo poſitae ſunt rectae AO et A*a*. Atque ſimili modo arbitrarium eſt quantumvis longa MO capiatur.

Coroll. 2.

138. Definita autem longitudine rectae MO in plano OA*a* poſitae, ſimul tam corpus in M collocandum, quam potentia ei applicanda M*m* determinantur.

Coroll. 3

139. Loco ergo cuiusuis corpusculi A circa punctum fixum O gyrantis aliud in data diſtantia ſubſtitui poteſt, quod prorſus eundem praeſtet effectum in motu gyratorio circa O generando, quem produceret illud corpusculum A in diſtantia AO.

LEMMA.

140. *Si fuerint plura corpuscula* A B, C, D *inter ſe firmiter connexa et in eodem plano ſita quae a poten-* Tab. VIII. fig. 3.

 tiis

tiis A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, *quarum directiones in eodem quoque plano ſint poſitae, circa punctum fixum* O *in eodem plano ſitum ad motum gyratorium ſollicitentur, erit vis gyratoria communis* $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$.

Demonſtratio.

Sumta in plano, in quo ſita ſunt tam corpuſcula cum puncto O, quam directiones, quibus ſollicitantur, recta arbitraria OM, loco corpuſculi A a potentia A*a* ſollicitati ſubſtituatur in M corpuſculum $\frac{A \cdot AO^2}{MO^2}$ a potentia $\frac{Aa \cdot AO}{MO}$ ſollicitatum (136), ſimilique modo loco corpuſculorum B, C, D a potentiis B*b*, C*c*, D*d*, ſollicitatorum, in M ſubſtituantur corpuſcula $\frac{B \cdot BO^2}{MO^2}$, $\frac{C \cdot CO^2}{MO^2}$, $\frac{D \cdot DO^2}{MO^2}$ a potentiis $\frac{Bb \cdot BO}{MO}$, $\frac{Cc \cdot CO}{MO}$, $\frac{Dd \cdot DO}{MO}$ ſollicitata. Hoc ergo facto loco omnium corpuſculorum a ſuis potentiis ſollicitatorum ſubſtitui poteſt in M Corpus $\frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}{MO^2}$, quod ſollicitetur in directione M*m* a potentia quae eſt $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{MO}$. Huius igitur corporis vis gyratoria erit $= \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$ cui aequalis eſt vis gyratoria, quae ex viribus gyratoriis ſingulorum corporum, A, B, C, D, coniunctim oritur. Q. E. D.

Coroll. I.

141. Vis ergo gyratoria plurium huiusmodi corpuſculorum aequatur ſummae momentorum ſingularum potentiarum in punctum fixum A, diuiſae per ſummam factorum ex ſingulis corpuſculis in quadrata eorum a puncto

cto fixo O ſeu ab axe, circa quem fit motus gyratorius multiplicatis.

Coroll. 2.

142. Angulus igitur, per quem corpusculorum A, B, C, D ſyſtema tempusculo dt circa punctum fixum O gyrabitur erit $= dt - \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + Cc \cdot CO + Dd \cdot DO}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + C \cdot CO^2 + D \cdot DO^2}$ vnde ipſe motus gyratorius cognoſcetur.

Coroll. 3.

143. Si aliquot corpuscula in plagam oppoſitam trahantur, tum potentiarum, quibus ea ſollicitantur momenta fient reſpectu reliquorum negatiua, ideoque in expreſſione inuenta ſubtrahi debebunt.

Coroll. 4.

144. Manentibus ergo potentiis corpus circa punctum fixum O ſollicitantibus iisdem, vis gyratoria eo erit maior, quo minor fuerit denominator fractionis inuentae, hoc eſt quo propius ſingulae corporis particulae puncto O fuerint ſitae.

Coroll. 5.

145. Si anguli, quos potentiarum ſollicitantium directiones cum rectis ad punctum O ductis conſtituunt, non fuerint recti, tum ſingula facta Aa. AO, Ab. BO etc. inſuper per ſinus angulorum OAa, OBb etc. reſpectiue multiplicari debent; ſumta vnitate pro ſinu toto.

Coroll. 6.

146. Vis ergo gyratoria euaneſcet, ſi momenta potentiarum corpus ſollicitantium in punctum fixum ſe mutuo deſtruant; hoc ergo caſu corpus quiescet.

Scholion.

147. Haec igitur ſunt lemmata, quibus ad motum corporum aquae innatantium explicandum opus erit; ex quibus ſatis intelligitur, ſi corpori cuicunque rigido applicatae ſint potentiae quaecunque, tum corporis illius centrum grauitatis eodem modo moueri, ac ſi tota corporis maſſa in ipſo centro grauitatis eſſet concentrata, eique omnes potentiae quaeque in ſua directione coniunctim eſſent applicatae. Praeterea vero totum corpus interim circa centrum grauitatis eodem modo mouebitur, ac ſi centrum grauitatis eſſet fixum, hicque motus gyratorius cognoſcetur ex momentis omnium potentiarum in centrum grauitatis. Si enim haec momenta ſe mutuo deſtruant, tum corpus plane nullum habebit motum gyratorium circa centrum grauitatis; eo maior vero erit hic motus gyratorius quo maius fuerit momentum ex omnibus potentiis in centrum grauitatis coniunctim ortum. In motu quidem corporum aquae innatantium iſte motus gyratorius ſi quis oritur ſtatim ſiſtitur, et hancobrem hoc caſu ſufficiet eum corporis ſitum determinare in quo motus gyratorius ceſſat; ad quem definiendum lemmata praemiſſa ſunt accommodata.

PROPOSITIO 15.
Theorema.

148. *Si corpus aquae inſidens non fuerit in aequilibrio, tum conuertetur circa centrum grauitatis, atque centrum grauitatis interea vel quieſcet vel directe ſurſum deorſumue mouebitur.*

De-

Demonſtratio.

Si corpus aquae quomodocunque immergatur id a duabus viribus vrgebitur, quarum altera aequalis eſt ponderi corporis, et in verticali per centrum grauitatis tranſeunte deorſum tendit, altera vero aequalis eſt ponderi aquae volumine partem aquae ſubmerſam aequantis, et corpus directe ſurſum pellit in directione per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeunte. Cum igitur centrum grauitatis ab his potentiis eundem accipiat motum, ac ſi tota corporis maſſa in eo eſſet concentrata et ab vtraque vi coniunctim ſollicitaretur, manifeſtum eſt centrum grauitatis vel quieſcere vel directe ſurſum deorſumue moueri debere. Niſi autem directio potentiae, qua corpus ſurſum vrgetur, per centrum grauitatis tranſeat, tum corpus ab hac vi interea circa grauitatis centrum conuertetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

149. Intelligitur ergo, ſi nimis magna pars corporis aquae fuerit immerſa, tum propter vim ſurſum vrgentem altera maiorem, centrum grauitatis aſcendere debere; contra vero ſi nimis exigua pars aquae immergatur, centrum grauitatis deſcendere debere.

Coroll. 2.

150. Si ergo tanta pars corporis aquae eſt immerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum centrum grauitatis quieſcet propter vires ſollicitantes inter ſe aequales et contrarias.

Co-

Coroll. 3.

151. Si igitur tanta corporis pars aquae fuerit ſubmerſa, quanta ad aequilibrium requiritur, tum corpus ſeſe in aequilibrium reſtituendo circa centrum grauitatis quieſcens conuertetur.

Scholion.

152 Hinc autem non ſequitur, quod, ſi ſemel tanta corporis pars aquae fuerit ſubmerſa, quanta ad aequilibrium producendum eſt neceſſaria, tum centrum grauitatis, quam diu conuerſio fit, perpetuo quieſcere debere. Inter conuertendum enim vtique euenire poteſt, vt pars corporis ſub aqua exiſtens, quippe quae continuo immutatur, fiat iuſto vel maior vel minor. Hoc igitur cum accideret, neceſſe eſt, vt centrum grauitatis ſtatim vel eleuetur vel deprimatur. Ipſe autem motus tum centri grauitatis tum conuerſionis non e veſtigio ceſſabit, cum corpus in ſtatum aequilibrii peruenerit, ſed prout in motu pendulorum euenit, in partem contrariam inclinabitur et reuertetur, hicque motus oſcillatorius tam diu durabit, quoad a reſiſtentia omnino abſorbeatur.

PROPOSITIO 16.

Problema.

Tab. IX. fig. 1.

153. Figurae planae aquae verticaliter inſiſtentis EAHBF ex ſitu aequilibrii depulſae, motum quo ſe in ſitum aequilibrii reſtituet, determinare.

Solutio.

Sit AHB pars aquae immerſa, O eius centrum magnitudinis et G centrum grauitatis totius figurae, quae centra

centra in plano AHB erunt poſita. Sollicitabitur ergo haec figura a preſſionibus aquae ſurſum in directione verticali OI vi aequali ponderi aquae ſpatium AHB occupantis; deorſum vero vrgebitur in directione GH vi ponderi figurae aequali. Quod iam ad motum centri grauitatis G attinet, id ſurſum pelletur, ſi vis OI fuerit maior quam vis GH; deorſum vero nitetur ſi vis GH vim OI ſuperet; caſu denique quo hae vires ſunt inter ſe aequales, centrum grauitatis G quieſcet. Deinde ſiue centrum grauitatis quieſcat ſiue aſcendat ſiue deſcendat, tota figura circa id conuertetur, niſi directiones OI et GH in eandem rectam verticalem incidant; qui motus conuerſionis ex momentis harum virium in centrum grauitatis cognoſcetur. Vis quidem GH, quippe quae per centrum ipſum grauitatis tranſit, momentum eſt nullum, at alterius vis OI momentum eſt OI. GL ducta GL ex G in rectam OI normali. Hac igitur vi figura ſecundum directionem BHA circa centrum grauitatis G conuertetur. Quantitas autem huius vis gyratoriae abſoluta pendet inſuper a ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G, quorum productorum ſumma ſi dicatur S, erit vis gyratoria $= \frac{OI.\,GL}{S}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

154. Impetus ergo, quo figura circa G conuertetur eo erit maior, quo maiores fuerint tum vis OI tum diſtantia GL, atque quo minor fuerit ſumma productorum ex ſingulis figurae particulis in quadrata diſtantiarum a centro grauitatis G.

Coroll. 2.

155. Manentibus ergo O I et GL invariatis vis figurae ſe reſtituendi eo erit maior, quo minor fuerit S, hoc eſt quo propiores fuerint omnes figurae particulae centro grauitatis G. Contra vero reſtitutio eo tardius fiet, quo magis particulae a centro grauitatis remoueantur.

Coroll. 3.

Tab. IX fig. 1. et 2.

156. Vis gyratoria, qua figura circa centrum grauitatis conuertitur, reduci poteſt ad vim qua ſimplex corpus a circa punctum fixum oa vi ab vrgetur. Eadem ſcilicet velocitate hoc corpus a gyrabitur, qua figura EHBF, ſi fuerit vis $ab = \frac{a.ao.GL}{S}$. OI.

Coroll. 4.

157. Datis ergo ſingulis momentis, dum figura conuertitur, ſitu centrorum grauitatis et magnitudinis mutuo, determinari poterit velocitas angularis quouis momento, atque tempus, quo tota reſtitutio abſoluitur.

Scholion. 1.

158. Si corpus aquae inſidens fuerit cylindricum, cuius omnes ſectiones transuerſales ſint ſimiles et aequales figurae EAHBF; manifeſtum eſt hoc corpus in aqua ſimili modo motum iri quo figura ſola EAHBF. Quamobrem ſi huiusmodi corpus cylindricum ita fuerit ex ſtatu aequilibrii depulſum, vt omnes illae ſectiones in ſitu verticali permaneant, tum hoc corpus circa rectam horizontalem per ſingularum ſectionum centra grauitatis G tran-

tranſeuntem tanquam circa axem conuertetur, donec in ſtatum aequilibri peruenerit. Atque praeterea motus huius reſtitutionis omnino congruet cum motu figurae EAHBF et eadem celeritate abſoluetur. Vis ergo, qua corpus hoc, dum ſingularum ſectionum partes ſimiles et aequales ipſi AHB aquae ſunt ſubmerſae, circa axem per omnium ſectionum centra grauitatis G tranſeuntem conuertetur, aequalis erit ponderi aquae volumine toti parti ſubmerſae aequali ducto in interuallum LG et diuiſo per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe conuerſionis multiplicatarum.

Scholion 2.

159. Quemadmodum hoc corpus cylindricum, cuius omnes ſectiones tranſuerſales non ſolum ſunt ſimiles et aequales, ſed etiam onera per eas ſimiliter ſunt digeſta, circa axem immobilem per centrum grauitatis tranſeuntem conuerti poteſt, ita quoque idem in aliis cuiusque formae corporibus euenire poteſt, vt circa axem immotum gyrari queant. Plerumque autem iſte motus reſtitutionis in ſtatum aequilibrii non circa axem quieſcentem, ſed pariter circa centrum grauitatis mobilem fieri ſolet, qui ipſius axis motus difficulter determinatur. Interim tamen ſemper qualiscunque fuerit corporis circa centrum grauitatis motus, is tanquam compoſitus ſpectari poteſt ex motibus circa duos axes factis, qui conceptus ita ſe habet, vt dum corpus circa axem quendam gyratur, eodem tempore quoque circa alium axem conuerti concipiendum ſit. Quin etiam fieri poteſt, vt motus circa centrum grauitatis ex

 mo-

motibus circa tres axes ſit compoſitus. Quamobrem quo huiusmodi motus curatius perſequi liceat, ante nobis inveſtigandae ſunt leges motus gyratorii circa axem fixum, quae deinde etiam ad motum ex aliquibus huiusmodi motibus compoſitum accommodari queant.

LEMMA.

Tab. XI. fig. 3.

160. *Si corpori, quod axe fixo* E F *eſt traiectum, applicatae fuerint quaecunque potentiae, erit vis gyratoria circa axem* E F *aequalis ſummae momentorum omnium potentiarum corpori applicatarum in axem* E F *diuiſae per aggregatum omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum earundem ab axe* E F *multiplicatarum.*

Demonſtratio.

Ex punctis A, B, C, D in quibus vires ſunt applicatae in axem E F demittantur perpendicula A*a*, B*b*, C*c*, D*d*; perſpicuum autem eſt vim B applicatam eundem effectum in corpore circa E F conuertendo habere, ac ſi recta B*b* in quodlibet aliud axis punctum promoueatur. Quamobrem puncta omnia *a*, *b*, *c*, *d* in idem punctum a incidere concipiantur, ita vt ſimul omnes corporis particulae in planum ad E F normale et per *a* tranſiens collocentur. Quo facto totum corpus in hoc planum reductum pari modo circa punctum fixum a ad gyrandum incitabitur a potentiis, atque ante: Quocirca vis gyratoria aequalis erit ſummae momentorum potentiarum omnium in axem E F diuiſae per aggregatum omnium particularum per ſuarum ab axe E F diſtantiarum quadrata multiplicatarum. Q. E. D.

Co-

Coroll. 1.

161. Si igitur corporis, quod circa axem fixum mobile exiſtit, vis gyratoria orta a quibuscunque potentiis ipſi applicatis determinari debeat, primo ſingulae corporis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe illo fixo ſunt multiplicandae et in vnam ſummam coniiciendae.

Coroll. 2.

162. Inuenta vero hac ſumma omnium productorum ex ſingulis particulis in quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe fixo, quaeri debent momenta potentiarum reſpe. ctu iſtius axis, quarum aggregatum per illam ſummam diuiſum exhibebit vim gyratoriam circa axem.

Coroll. 3.

163. Cognita autem vi gyratoria, ſi ea per elementum temporis multiplicetur, productum dabit elementum celeritatis gyratoriae hoc tempuſculo genitum; vnde totus motus gyratorius eodem modo determinari poterit quo motus corporis a potentia ſollicitati in directum.

Scholion.

164. Intelligitur ex demonſtratione regulam datam pro inuenienda vi gyratoria aeque locum habere, ſiue axis per centrum grauitatis corporis tranſeat ſiue ſecus. Interim tamen ob ſupra allatas cauſas alius axis per ſe immobilis eſſe non poteſt, niſi qui per centrum grauitatis tranſit. Inſeruiet igitur haec regula quoque, ſi corpus fuerit mobile circa axem non quidem per centrum grauitatis

tatis transeuntem, verum qui ab aliena vi fixus teneatur.

Definitio.

165. Momentum inertiae corporis respectu axis cuiusdam fixi voco aggregatum omnium corporis particularum per suarum respectiue ab hoc axe distantiarum quadrata multiplicatarum.

Coroll. 1.

166. Si ergo corpori circa fixum quempiam axem mobili potentiae fuerint applicatae, vis gyratoria exprimetur aggregato momentorum potentiarum respectu huius axis, diuiso per momentum inertiae ipsius corporis respectu eiusdem axis.

Coroll. 2.

167. Cum infiniti esse possint axes, circa quos corpus datum moueri potest, infinita etiam quodlibet corpus habebit momenta. Hancobrem si de momento corporis sermo est, simul definiri debet axis, cuius respectu momentum inertiae accipitur prout in definitione est declaratum.

Scholion 1.

168. Hanc momenti inertiae vocem breuitatis gratia introducere visum est, quo tam amplae descriptiones, quae saepissime occurrerent, euitentur. Quemadmodum enim in motu rotatorio momentum potentiae vocatur potentia ad effectum iam applicata, ita etiam commode in corporibus gyrantibus aggregatum omnium illorum productorum

rum momentum inertiae corporis appellatur, cum vicem maſſae ſeu inertiae ad effectum applicatae ſuſtineat.

Scholion 2.

169. Quo de huiusmodi corporum momentis inertiae clariorem notitiam acquiramus, iuuabit corporum quorumdam momenta inueſtigaſſe, quae etiam in ſequentibus vſum habere poterunt. Axes autem tantum conſiderabo per centrum grauitatis tranſeuntes, et eorum reſpectu momenta determinabo; cum infra ſim oſtenſurus, quomodo ex datis momentis inertiae reſpectu axium per centrum grauitatis tranſeuntium momenta reſpectu aliorum quorumque axium inueniri queant.

Exemplum 1.

170. Sit priſma triangulare rectum ABC*abc* ex materia conſtans vniformi, cuius maſſa ſit $= M$. Tranſeat per eius centrum grauitatis axis G*g*, qui ſimul per ſingularum ſectionum transverſalium centra gravitatis tranſibit, erit momentum inertiae huius priſmatis reſpectu huius axis $= \frac{M(AB^2 + AC^2 + BC)}{36}$.

Tab. XI. fig 4.

Exemplum 2.

171. Sit priſma quadrangulare rectum ſeu parallelepipedum ABCD*abcd*, cuius baſes ABCD et *abcd* ſint parallelogramma, ex materia vniformi conſtans et maſſam habens $= M$. Ductus ſit per eius centrum gravitatis axis G*g*, per vtriusque baſis centra grauitatis G et *g* tranſiens, erit momentum inertiae huius parallelepipedi

Tab. IX. fig. 5.

di respectu huius axis $= \frac{M(AB^2+BC^2)}{12}$. Siue ergo bases sint rectangulae siue obliquangulae, momentum inertiae pari modo ex solis lateribus et massa determinatur.

Exemplum 3.

Tab. X. fig. 1.

172. Sit corpus cylindrus rectus ABCD *abcd*, cuius bases ABCD et *abcd* sint circuli, ex materia vniformi constans eiusque massa $= M$. Traiiciatur iste cylindrus axe G, *g*, basium centra iungente, erit momentum inertiae huius cylindri respectu axis G*g* $= \frac{M.AC^2}{2} = \frac{M.AB^2}{8}$.

Coroll.

173. Si ex praecedentibus prismatibus et cylindris secentur pyramides et coni recti, earumdem basium et altitudinum, erunt eorum momenta inertiae respectu eorundem axium quinquies minora, quam momenta prismatum et cylindrorum. Massae enim fiunt priorum trientes, alterique factores ad priores rationem 3 : 5. tenent.

Exemplum. 4.

174. Si autem in eodem cylindro per centrum grauitatis O ducatur axis transuersus PQ normalis ad priorem axem G*g*, erit cylindri momentum inertiae respectu huius axis PQ $= M(\frac{Gg^2}{12} + \frac{AB^2}{16})$.

Exemplum 5.

Tab. XI. fig. 2.

175. Si globi ex materia vniformi constantis, cuius massa est M. momentum inertiae requiratur respectu diametri AB, perinde enim est quaecunque diameter accipiatur

piatur, reperietur hoc momentum $= \frac{2}{5}$ M. AG² seu $= \frac{M \cdot AB^2}{10}$. Producti scilicet ex massa in quadratum diametri pars decima dat globi momentum inertiae respectu cuiusque axis per centrum transeuntis.

Exemplum 6.

176. Si corpus fuerit sphaeroides ellipticum, genitum ex rotatione ellipsis ACBD circa axem AB, ex materia vniformi constans, eiusque massa $= M$. erit eius momentum inertiae respectu axis AB, qui simul est axis sphaeroidis $= \frac{M \cdot CD^2}{10}$. Momentum vero inertiae eiusdem sphaeroidis respectu axis CD ad priorem axis normalis erit $= \frac{M(AB^2 + CD^2)}{20}$. Est vero sphaerae diametri AB soliditas ad soliditatem huius sphaeroidis vt AB^2 ad CD^2.

Tab. X. fig. 3.

Scholion 3.

177. Modum, quo horum corporum momenta inertiae sunt inuenta, superfluum visum est hic apponere, cum mera constet analysi, atque ab aliis, qui calculum centri oscillationis tradiderunt, iam satis sit expositus. Quo autem, si corpora fuerint magis composita et irregularia, vel si momenta respectu aliorum axium, qui per centrum grauitatis non transeunt, requirantur, totum negotium sine maxime taedioso calculo absoluit queat, sequens lemma adiunxi.

LEMMA.

178. *Dato momento inertiae cuiusque corporis respectu axis* AB *per corporis centrum grauitatis* G *transeuntis, inuenire eiusdem corporis momentum inertiae respectu alius cuiusuis axis* CD *priori axi* AB *paralleli.*

Tab. X. fig. 4.

Solutio.

Sit maſſa corporis $= M$ et momentum inertiae eius reſpectu axis $AB = S$. Ducatur recta HG parallelos axes normaliter ſecans, quo habeatur diſtantia axium GH, ſeu diſtantia centri grauitatis corporis, ab axe CD cuius reſpectu momentum inertiae quaeritur. Conſideretur corporis quaecunque molecula $\underline{m}$, ex eaque in planum $ABDC$ in quo ſiti ſunt axes, perpendiculum mQ demittatur. Agatur QRS parallela ipſi GH, itemque mR et mS, quae in axes erunt normales. Quaeſito ergo ſatisfiet ſi ſumma omnium $m.\ mS^2$ definiatur; quam per $\int m.\ mS^2$ indicemus. Momentum vero huius corporis reſpectu axis AB eſt $= \int m.\ mR^2$, quod cum detur, erit $\int m.\ mR^2 = S$; at $\int m$ ſeu ſumma omnium corporis molecularum aequatur maſſae toti M. Cum iam ſit $MS^2 = mR^2 + SR^2 + 2\ SR.RQ$ erit $\int m.\ mS^2 = \int m.\ mR^2 + \int m.\ SR^2 + 2 \int m.\ SR.RQ = \int m.\ mR^2 + SR^2.\ \int m + 2 SR \int m.\ RQ$. ob $SR = GH$ ideoque conſtans. Quia autem AB per corporis centrum grauitatis G tranſit, erit per notam centri grauitatis proprietatem $\int m.\ RQ = 0$. Quare cum ſit $\int m.\ mR^2 = S$ et $\int m = M$ erit quaeſitum corporis propoſiti momentum inertiae reſpectu axis $CD = S + M.GH^2$. Q. E. I.

Coroll. 1.

179. Momentum ergo inertiae corporis reſpectu axis CD aequale eſt momento inertiae eiusdem corporis reſpectu axis AG per centrum grauitatis G tranſeuntis, vna cum facto ex maſſa in quadratum diſtantiae centri grauitatis G ab axe CD.

Coroll.

Coroll. 2.

180. Dato ergo momento inertiae corporis respectu axis cuiusdam per centrum eius grauitatis transeuntis, facile determinabitur eiusdem corporis momentum inertiae respectu alius cuiusque axis illi axi paralleli.

Coroll. 3.

181. Si igitur corpus, cuius momentum inertiae respectu axis cuiusvis quaeritur, ex pluribus compositum sit partibus, quarum singularum momenta respectu axium illi axi parallelorum et per cuiusque partis centrum grauitatis transeuntium dantur, erit momentum inertiae quaesitum aequale summae omnium momentorum partium vna cum productis ex singulis partibus per quadrata distantiarum cuiusque centri grauitatis ab axe illo multiplicatis.

Coroll. 4.

182. Hinc igitur manat modus facilis quo citra calculum corporis maxime compositi momentum inertiae respectu cuiusvis axis inuenire licet.

Scholion.

183. Ex his sequitur modus facilis et maxime naturalis determinandi centrum oscillationis in corporibus quibuscunque circa axem oscillantibus, quem, etiamsi is huc non pertineat, tamen hic apponi conueniet. Sit corpus quodcunque, quod oscilletur circa axem horizontalem per O transeuntem, atque C punctum in verticali OC situm, in quod corporis centrum grauitatis incidet, ita

Tab. XI. fig. 1.

ita vt OC ſit diſtantia centri oſcillationis ab axe. Conſideremus autem corpus extra ſitnm verticalem detruſum, eiusque centrum grauitatis in G, ita vt ipſi angulus GOC ſit deſcribendus, donec in ſitum aequilibrii pertingat. Vis autem, quae corpus ad hunc motum angularem ſollicitat, eſt pondus corporis quo in directione GH deorſum vrgetur. Sit nunc maſſa ſeu pondus corporis $= M$ eiusque momentum inertiae reſpectu axis per centrum grauitatis G tranſeuntis et axi oſcillationis paralleli $= S$ erit huius corporis momentum reſpectu axis oſcillationis $= S + M.OC^2$. Momentum autem grauitatis ad motum angularem circa O generandum eſt M. GO. ſin. O; ideoque vis gyratoria erit $= \frac{M \cdot GO \cdot \sin O}{S + M . OC^2}$. Contemplemur nunc pendulum ſimplex og aequali angulo goc a ſitu verticali oc diſtans cui in g ponduſculum infinite paruum p ſit alligatum circa o oſcillans, erit vis gyratoria, qua ponduſculum p ad angulum goc abſoluendum animatur $= \frac{\sin O}{OC}$. Si ergo haec vis gyratoria aequalis fuerit priori, pendulum ſimplex og et compoſitum OG ſimul in ſitum verticalem peruenient, quia vtrique aequalis angulus eſt percurrendus. Faciamus ergo $\frac{M \cdot CO \cdot \sin O}{S + M \cdot OC^2} = \frac{\sin o}{oc}$ prodibit $oc = \frac{S + M \cdot CO^2}{M \cdot CO}$ quae eſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſeu diſtantia centri oſcillationis in pendulo compoſito OC ab axe oſcillationis, erit ergo centrum oſcillationis in Z, vt ſit $OZ = CO + \frac{S}{M \cdot CO}$; Vnde apparet centrum oſcillationis perpetuo infra centrum grauitatis G cadere, eſſeque interuallum $CZ = \frac{S}{M \cdot CO}$.

Hypotheſis.

Tab. XI. fig. 2.

184. In omnibus corporibus aquae innatantibus praecipue vero in nauibus concipere licet tres axes per centrum

trum grauitatis G transeuntes inter se normales, primum verticalem scilicet CGD, secundum horizontalem AGB spinae RS parallelum, in plano diametrali situm ARSB et tertium EGF pariter horizontalem, si quidem nauis fuerit in statu aequilibrii, et ad priorem AGB normalem. Deinde ponere licet corpus huiusmodi a viribus sollicitantibus circa vnumquemque horum axium ita conuerti posse, vt motus gyratorius circa vnum horum axium non turbetur a motibus gyratoriis circa reliquos.

Scholion 1.

185. Ex superioribus satis intelligitur corpus circa alium axem liberum et immotum gyrari non posse, nisi circa quem omnes vires centrifugae se destruant. Quamobrem si vires sollicitantes corpus circa alium axem rotare conentur, motus orietur maxime irregularis, cum etiam axis inclinetur; quem motum definire difficillimum etiamnum est. Huic igitur incommodo medela afferetur, si talis motus irregularis resolui posset in duos vel tres motus rotatorios circa axes fixos simul factos; tum enim cognito motu circa quemque axem seorsim, motus totus inde facile colligeretur. Quamuis autem haec resolutio accurate non succedat, tamen si ad praxin respiciamus, tuto satis adhiberi poterit, si tres illi axes inter se fuerint normales; tum enim motus circa vnum minime a motibus circa reliquos turbabitur. Praeterea vero si hi axes ita sint comparati vt corpus circa quemlibet seorsim immotum gyrari queat, resolutio ista eo magis veritati erit consentanea. In nauibus autem, ad quas hanc tractationem praecipue accomodare institui, huiusmodi tres axes vel

vel reuera vel proxime adesse solent. Quaelibet enim nauis circa axem verticalem CD immotum gyrari potest, atque etiam circa axem AB, quippe qui in plano diametrali est situs; tertius autem axis EF pari praerogatiua gaudet, prout experientia satis euincit.

Coroll. 1.

186. Si ergo huiusmodi corpori vna pluresue potentiae fuerint applicatae, earum effectus tam in corpore promouendo, quam gyrando circa centrum grauitatis ex hactenus traditis praeceptis facile determinabitur. Primo enim omnes potentiae in directionibus sibi parallelis centro grauitatis concipiantur applicatae, ex iisque motus progressiuus centri grauitatis concludatur. Deinde singularum potentiarum momenta in ternos illos axes quaerantur, ex quibus motus rotatorius circa quemvis axem seorsim cognoscetur. Collatis denique his motibus rotatoriis inter se, verus motus circa centrum grauitatis satis accurate colligetur.

Coroll. 2.

187. Tria ergo requiruntur ad hos motus determinandos cuiusque corporis momenta inertiae respectu trium scilicet axium circa quos rotatio fieri concipitur.

Coroll. 3.

188. Si igitur in corpore tres huiusmodi axes inter se normales dentur, atque momentum corporis respectu cuiusque axis fuerit assignatum, tum quaecunque potentiae hoc corpus sollicitent, verus motus ab iis productus quam proxime poterit determinari: in hunc autem finem lemma sequens adieci.

LEMMA

LEMMA.

189. *Si corpus* PARSBQ *vrgeatur a quibuscunque potentiis, inuenire motum qui in corpore generatur.* Tab. XI. fig. 2.

Solution.

Ex ſuperioribus conſtat a potentiis quibuscunque in corpore duplicem generari motum progreſſiuum ſcilicet centri grauitatis, et gyratorium circa centrum grauitatis; quorum motuum prior definitur ſi totum corpus in centro grauitatis concipiatur concentratum, eique omnes potentiae in directionibus parallelis ponantur applicatae. Ad motum gyratorium vero determinandum ſint AB, CD, et EF tres illi axes per centrum grauitatis G ducti et inter ſe normales, circa quorum quemlibet immotum corpus ſeorſim libere gyrari queat. Sit nunc momentum inertiae corporis reſpectu axis CD $=$ P momentum reſpectu axis AB $=$ Q et momentum reſpectu axis EF $=$ R. Conſideretur iam vna quaecunque potentiarum ſollicitantium OZ, quae in puncto O ſit applicata, ſeu cuius directio per O tranſeat. Ex puncto hoc O in planum ADBC ducatur normalis OH, itemque in planum AEBF normalis OL atque in CEDF normalis OI, habebiturque iunctis LN, LM, MH, HK, KI et NI parallelepipedum rectangulum NGMLOHKI. Deinde potentia OZ in puncto O applicata reſoluatur in tres potentias, Oa, Ob, Oc, quarum directiones ſint inter ſe normales et parallelae axibus CD, AB et EF. Conſtat iam potentiae Oa momentum reſpectu axis AB fore Oa. LM $=$ Oa. GN; eiusdemque potentiae momentum reſpectu axis EF fore $=$ Oa. LN $=$ Oa. MG.

Simili

Simili modo potentiae Ob momentum respectu axis CD erit $= Ob.\ IK = Ob.\ GN$, et momentum respectu axis $EF = Ob.\ IN = Ob.\ GK$. Denique potentiae Oc momentum respectu axis CD erit $= Oc.\ HK = Oc.\ GM$ atque momentum respectu axis $AB = Oc.\ HM = Oc.\ GK$. corpus igitur circa vnumquemque axem duobus momentis vrgebitur quae inter se vel conspirant vel contrariantur. Spectata igitur congruentia vel repugnantia momentotum reperietur potentiae propositae OZ momentum ad corpus circa axem CD conuertendum fore $= Ob.\ GN + Oc.\ GM$. Momentum vero respectu axis AB erit $= Oa.\ GN - Oc.\ GK$. Atque momentum respectu axis EF erit $= Oa.\ GM + Ob.\ GK$ Simili modo reliquae potentiae corpus sollicitantes sunt resoluendae, earumque momenta in singulos axes quaerenda, quae prout istis momentis vel fauent vel repugnant, signo + vel − ipsis sunt adiiciendae. Ponatur igitur p pro momento potentiarum respectu axis CD; q pro momento respectu axis AB et r pro momento respectu axis EF. His ergo inventis habebitur vis gyratoria circa axem $CD = \frac{p}{P}$; vis gyratoria respectu axis $AB = \frac{q}{Q}$; atque vis gyratoria respectu axis $EF = \frac{r}{R}$ quae vires cum coniunctim aeque agant, ac seorsim, verus motus gyratorius innotescet. Q. E. I.

Coroll. 1.

190. Si directio potentiae sollicitantis OZ per centrum grauitatis corporis G transeat, atque punctum O in G capiatur euanescet parallelepipedum GNLMHOIK, atque propterea vires gyratoriae omnes in nihilum abibunt, vti quidem alias constat.

Co-

Coroll. 2.

191. Si directio potentiae sollicitantis OZ parallela fuerit vni axium, tum corpus circa hunc axem non convertetur, sed tantum circa duos reliquos.

Scholion.

192. Quia directio potentiae sollicitantis est linea recta, in ea vbicunque libuerit punctum O, in quo resolutio instituitur accipi potest: vnde dubium oriri posset, vtrum perpetuo eaedem vires gyratoriae circa singulos axes sint proditurae, mutato puncto O, an vero secus. Sed qui rem attentius perpendet, facile intelliget, in quocunque loco rectae OZ punctum O accipiatur, eadem momenta respectu axium reperiri debere.

PROPOSITIO 17.

Problema.

193. *Corporis cuiuscunque aquae insidentis et ex situ aequilibrii depulsi motum, quo se in situm aequilibrii restituet, determinare.*

Tab. XI. fig. 2.

Solutio.

Sit PARSBQ corpus, cuius ex situ aequilibrii, quem in aqua tenet, depulsi restitutionem quaerimus; G eius centrum grauitatis, atque CD, AB et EF tres eius axes inter se normales, circa quorum quemuis immotum corpus libere rotari queat. Sit massa seu pondus huius corporis $= M$ atque momentum inertiae eius respectu axis $CD = P$; momentum respectu axis $AB = Q$ et momentum respectu axis $EF = R$. Ponamus iam corpus hoc aquae

aquae ita insidere, vt partis submersae centrum magnitudinis sit in O, atque OZ linea ad superficiem aquae normalis, seu verticalis; sit N pondus aquae partem submersam volumine aequantis; vrgebitur ergo hoc corpus a pressione aquae sursum in directione OZ vi $= N$. simul vero deorsum vrgebitur proprio pondere M in directione GX per centrum grauitatis G. transeunte. Ab his ergo duabus viribus centrum grauitatis G sursum vel deorsum vrgebitur prout N vel maius vel minus fuerit quam M id quod per se patet. Quemadmodum autem corpus interea circa centrum grauitatis G convertatur, sequenti modo ex sola vi OZ definietur; cum altera vis GX per centrum grauitatis ipsum G transeat. Ex O ducantur axibus singulis rectae parallelae OLa, bOI, OHe sitque cosinus ang. $ZOa = a$; cos. ang. $ZOb = b$ et cos. ang. $ZOc = c$. His positis si potentia N in directione OZ trahens resoluatur in tres potentias iuxta directiones Oa, Ob, et Oc trahentes, erit $Oa = Na$; $Ob = Nb$ et $Oc = Nc$. Ex istis cum lemmate praecedente comparatis inuenietur vis gyratoria circa axem $CD = \frac{N(b \cdot GN + c \cdot GM)}{P}$ agens in sensum AEBF. Circa axem AB vero erit vis gyratoria $= \frac{N(a \cdot GN - c \cdot GK)}{Q}$ agens in sensum ECFD. Vis denique gyratoria circa axem EF erit $= \frac{N(a \cdot GM + b \cdot GK)}{R}$ agens in sensum BCA. quae vires gyratoriae si simul considerentur, obtinebitur verus motus gyratorius circa centrum grauitatis. Q. E. I.

Coroll. 1.

194. Si ex centro grauitatis G in directionem potentiae sollicitantis OZ demittatur perpendiculum GY sine resolu-

resolutione potentiae OZ, momenta eius respectu cuiusque axis poterunt determinari.

Coroll. 2.

195. Si enim sinus inclinationis axis CD ad planum GYZ fuerit K erit momentum potentiae OZ=N respectu axis CD=N. GY. K.

Coroll. 3.

196. Similiter si sinus inclinationis axis AB ad planum GYZ fuerit *m*, erit momentum potentiae N respectu axis AB=N. GY. *m*.

Coroll. 4.

197. Atque si sinus anguli inclinationis axis EF ad planum GYZ ponatur *n* erit momentum potentiae N respectu axis EF=N. GY. *n*.

Coroll. 5.

198. Hinc ergo facilius patet momenta eadem prodire, in quocunque loco rectae OZ punctum O capiatur, cum eius positio in his formulis in calculum non ingrediatur.

Scholion.

199. Ratio horum momentorum in corollariis assignatorum fluit quidem ex forma momentorum propositionis, sed tamen facilius ex principiis staticis reddi potest sequenti modo. Sit corporis cuiusuis centrum grauitatis G, et axis per id transiens GC, cuius respectu momentum cuiuscunque potentiae corpus sollicitantis determinari oporteat.

Tab. XII. fig. I.

teat. Vrgeatur ſcilicet corpus a potentia N in directione YZ, in quam ex centro grauitatis G cadat perpendiculum GY. Iam ex Z in planum GYC demittatur perpendiculum ZC, iunctaque CY, erit planum ZYC normale ad planum GYC, atque CY normalis in CY. Reſoluatur potentia YZ in binas laterales YC et alteram cuius directio eſt parallela ipſi ZC; habebitque haec poſterior potentia ſola, quae eſt $\frac{N \cdot ZC}{YZ}$ momentum reſpectu axis GC. Demiſſo igitur ex Y in GC perpendiculo YM, erit momentum potentiae reſpectu axis $GC = \frac{N \cdot ZC \cdot YM}{YZ} = \frac{N \cdot ZC \cdot GY \cdot YC}{YZ . GC}$. Demiſſo nunc porro ex C in YZ perpendiculo CN, erit $YZ : CZ = YC : CN$, vnde prodit illud momentum $= N . GY . \frac{CN}{GC}$. Eſt vero CN perpendiculum ex C in planum GYZ demiſſum ob CY ad GY et ZY ad CY atque CN ad YZ normales. Quamobrem exprimet $\frac{CN}{GC}$ ſinum anguli, quem axis GC cum plano GZY conſtituit. Qui ſinus ſi dicatur k erit momentum $= N . GY . k$, vti in corollariis eſt aſſertum.

PROPOSITIO 18.

Problema.

Tab. XII. fig. 2.

200. *Si corpus aquae inſidens vtcunque fuerit ex ſitu aequilibrii deturbatum, definire axem per centrum grauitatis tranſeuntem, circa quem corpus gyrari incipiet.*

Solutio.

Sit corporis pars aquae immerſa MPNQXP, eiusque centrum magnitudinis O et pondus aquae volumine partem ſubmerſam aequantis $= N$. Sit PMQN ſectio aquae in plano horizontali ſita, et OZ recta verticalis,

vr-

vrgebitur ergo corpus a pressione aquae vi N in directione OZ sursum. Ponatur corporis centrum grauitatis in G, et ex G in OZ demittatur perpendiculum GY. Deinde per G ad planum GYZ ducatur normalis DC quae proin erit linea horizontalis. Circa hanc autem lineam horizontalem DC tanquam circa axem corpus in situm aequilibrii sese restituens, conuerti incipiet Nam cum axis DC ad planum GYZ sit normalis, potentia N nullum habebit momentum in alios axes huic axi DC normales. Tota ergo potentia vim suam impendet ad corpus circa axem DC conuertendum, eritque eius momentum $= N . GY$. Q. E. I.

Coroll. 1.

201. Si ergo axis DC ita fuerit comparatus, vt corporis circa eum rotantis vires centrifugae se mutuo destruant, tum corpus perget circa hunc axem immotum gyrari.

Coroll. 2.

202. Corpus ergo aquae insidens ex situ aequilibrii deturbatum, in eum restituetur motu gyratorio circa axem quendam horizontalem: dum interea centrum grauitatis vel sursum vel deorsum tantum fertur.

Scholion.

203. Etiamsi autem corpus circa axem CD immotum libere gyrari possit, tamen inde non sequitur, integram restitutionem fieri circa hunc axem. Nam inter hunc motum directio OZ mutari potest, vnde quoque variatio axis DC oritur. Sed ex his tamen satis motus restitutionis perspicitur.

Caput Tertium
DE
STABILITATE, QVA CORPORA AQVAE INSIDENTIA IN SITV AEQVLIBRII PERSISTVNT.

PROPOSITIO 19.
Theorema.

204.

Stabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſeuerat, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus dato angulo infinite paruo ex ſitu aequilibrii fuerit declinatum.

Demonſtratio.

Si corpus aquae innatans aliquantillum ex ſitu aequilibrii declinetur, tum vel reſtituetur, vel quieſcet, vel etiam magis a ſitu aequilibrii recedet, et quaſi prolabetur ſe in alium ſitum aequilibrii recipiendo. In caſu igitur, quo ex ſitu aequilibrii declinatum quieſcit, ſtabilitas eſt nulla, cum etiam corpus ſibi relictum non reſtituatur; caſu vero, quo magis recedit a ſitu aequilibrii, ſtabilitas non ſolum nulla ſed negatiua adeo eſt cenſenda. Stabilitas ergo iis tantum aequilibrii ſitibus eſt tribuenda, in quos corpus ſi aliquantillum declinetur, reſtituitur. Si autem corpus minimo tantum angulo e ſitu aequilibrii declinetur, reſtitu-

reſtitutio fiet circa axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem, prout in propoſitione 18 eſt monſtratum. Cauſa vero reſtitutionis eſt momentum preſſionis aquae circa illum axem, quod in eodem corpore ipſi angulo proportionale eſſe infra oſtendetur. Quo ergo in diverſis corporibus eodem angulo e ſitu aequilibrii declinatis maius fuerit momentum illud reſtitutionis, eo fortior erit vis reſtitutionis, eoque propterea maior vis perſeuerandi in ſitu aequilibrii, quam ſtabilitatem voco. Hanc obrem ſtabilitas, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſiſtit, aeſtimanda eſt ex momento potentiae reſtituentis, ſi corpus angulo infinite paruo e ſitu aequilibrii declinetur. Q. E. D.

Coroll. 1.

205. Cum igitur in eodem corpore momentum reſtitutionis angulo declinationis a ſitu aequilibrii ſit proportionalis, atque in diuerſis corporibus ſtabilitas per aequales angulos definiatur, erit in corpore quocunque ſtabilitas abſolute vt momentum reſtitutionis per angulum declinationis diuiſum.

Coroll. 2.

206. Quia in ſtabilitate determinanda axis quidam horizontalis conſideratur, circa quem minima inclinatio fieri concipitur, manifeſtum eſt pro eodem corpore eodemque aequilibrii ſitu infinitas inueniri ſtabilitatis aeſtimationes, pro infinitis axibus, quorum reſpectu ſtabilitas definitur.

Corol. 3.

Coroll. 3.

207. Quando ergo de ſtabilitate, qua datum corpus aquae inſidens in dato aequilibrii ſitu perſiſtit, ſermo eſt, axis ſimul erit indicandus ad quem ſtabilitas refertur; alioquin enim ſtabilitas determinatam quantitatem habere nequit.

Coroll. 4.

208. Si ergo corpus quodpiam aquae in ſitu aequilibrii inſidat, ſtabilitas reſpectu cuiusdam axis fixi horizontalis indicabit, quantum illud corpus inclinationi circa illum axem reſiſtat. Quo magis enim corpus aquae inſidens inclinationi circa quempiam axem reluctatur, eo maior cenſetur eius ſtabilitas reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 5.

209. Quo ergo maior reperietur valor ſtabilitatis reſpectu cuiusdam axis, eo magis corpus inclinationi circa hunc axem reſiſtet. Atque ſi ſtabilitatis valor prodeat $=0$, tum corpus ne quidem reſtituetur, ſi parumper circa illum axem inclinetur. At ſi ſtabilitas fuerit negatiua, tum corpus vel minime circa axem inclinatum non ſolum non reſtituetur, ſed ſubuertetur, donec in ſitum aequilibrii firmum et ſtabilem perueniat.

Scholion 1.

210. Doctrina haec de ſtabilitate corporum aquae innatantium, qua in ſitu aequilibrii quem tenent, perſeuerant, maximi eſt momenti in conſtructione et onerati-one nauium. Maxime enim in nauigatione requiri ſolet, vt naues in ſitu ſuo recto quam firmiſſime perſiſtant, at-

que

que viribus inclinantibus vehementiſſime reſiſtant. Hancobrem iſtam doctrinam eo accuratius in hoc capite euoluere conſtitui, quo poſtmodum ex ea vtiles regulae pro conſtruendis et onerandis nauibus elici queant. Cum igitur in primo capite omnes ſitus inueſtigauerimus, quibus corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtere poſſit; hic in ſtabilitatem inquiremus, qua in quouis aequilibrii ſitu reſpectu cuiusque axis perſeueret. Inueniemus ergo alios aequilibrii ſitus firmos et ſtabiles, quando ſcilicet ſtabilitas affirmatiuum obtinebit valorem, alios vero inſtabiles ac labiles, quando ſtabilitas prodit negatiua. Habebuntur etiam nonnunquam ſitus ambigui, in quos ſtabilitas euaneſcens competit; quos caſus omnes diligenter perpendere ad praecepta rei nauticae tradenda maxime conducet.

Scholion 2.

211. Quamuis ad ſtabilitatem dati aequibrii ſitus perfecte cognoſcendam requiratur, vt ſtabilitas reſpectu omnium axium horizontalium definiatur, tamen ſatis commode gradus ſtabilitatis intelligitur, ſi ſtabilitas tantum reſpectu duorum axium inueſtigetur, quorum alter ſtabilitatem maximam alter vero minimam praebeat; ex his enim licebit ſtabilitatem reſpectu cuiusuis alius axis facile aeſtimare, cum plerumque ſufficiat limites noſſe, inter quos ſtabilitas contineatur. Sic naues a viribus externis multo difficilius proram puppemue verſus inclinantur quam ad latera, earumque ſtabilitas proinde reſpectu axis ſecundum latitudinem ducti maxima eſt, ſtabilitas vero reſpectu axis nauim ſecundum longitudinem traiicientis, minima. Stabilitatis ſcilicet definitio ſimilis eſt momentorum tam virium

quam inertiae, quae abſolute aſſignari non poſſunt, ſed ſemper ad axem quempiam, circa quem inclinatio fieri concipitur, referri debent. Hoc igitur pacto iſta tractatio, quae fere infinita videatur, maxime contrahetur, vt facili negotio abſolui queat. Quo autem a caſibus ſimplicioribus inchoemus, primo non corpora ſed tantum ſuperficies planas conſiderabimus, quae aquae in ſitu verticali inſideant, atque circa axem horizontalem per centrum grauitatis ſuperficiei ad ipſius planum normaliter tranſeuntem mobiles exiſtant. In huius modi ſcilicet ſuperficiebus planis alias a ſitu aequilibrii declinationes non contemplabimur, niſi quibus ipſae ſuperficies maneant verticales.

PROPOSITIO 20.
Problema.

212. *Inuenire ſtabilitatem, qua ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens in ſitu aequilibrii perſeuerat.*

Solutio.

Tab. XIII. fig. 1.

Sit A M F N B ſuperficies quaecunque plana aquae verticaliter inſidens ita vt recta horizontalis A B ſit ſectio aquae. Sit centrum grauitatis huius figurae in G, et pondus figurae $= M$. Ducatur per G recta verticalis E F, in quam cadat centrum magnitudinis O partis ſubmerſae AMFNB quia figura in hoc ſitu aequilibrium tenere ponitur; atque ob eandem rationem pars ſubmerſa AMFNB tanta erit, vt maſſae aqueae volumine ipſi aequalis pondus ſit $= M$. Inclinetur iam figura haec quam minime ex ſtatu aequilibrii, ita vt ab fiat ſectio aquae, atque per G ipſis

ipſis A B et ab ducantur parallelae M N et mn, quarum M N horizontalis erit in ſitu aequilibrii, mn vero horizontalis in ſitu inclinato. Sitque angulus inclinationis $MGm = dw$. Cum igitur pars ſubmerſa perpetuo conſtans eſſe debeat, erit area $aMFNb =$ areae AMFNB: niſi enim aequalis eſſet, centrum grauitatis vel aſcenderet vel deſcenderet donec aequalitas fuerit comparata, quo motu ipſe reſtitutionis motus circa centrum grauitatis factus, quem hic ſolum ſpectamus non turbatur. Poſita ergo interſectione rectarum AB et ab in C, erit area $ACa =$ areae BCb. Ob angulum autem inclinationis dw infinite paruum erit area $ACa = \frac{AC^2 \cdot dw}{2}$ et area $BCb = \frac{BC^2 \cdot dw}{2}$ vnde prodit $AC = BC = \frac{AB}{2}$. Quo nunc vis reſtitutionis ex ſitu inclinato in ſitum aequilibrii inveniatur, quaerendum eſt centrum magnitudinis partis ſubmerſae $aMFNb$; quae cum ſit $= AMFNB + BCb - ACa$, ex harum partium centris grauitatis reperiri poterit verae partis ſubmerſae centrum magnitudinis, indeque preſſionum aquae momentum ad reſtitutionem aequilibrii. Reſtituetur vero in aequilibrium, dum recta MN in ſitum horizontalem $\overline{mn}$ reducetur. Conſideremus igitur primo aream $AMF\overline{NB}$ cuius centrum grauitatis eſt in O et vis ſurſum vrgens ab ea orta $= M$. Per O ducatur verticalis VOo quae eſt directio vis M figuram ſurſum vrgentis; momentum ergo huius vis ad reſtituendum eſt $= M.GV = M.GO.dw$ ob angulum $GOV = MGm = dw$. Porro conſideretur areola CBb, cuius area eſt $\frac{BC^2 \cdot dw}{2} = \frac{AB^2 \cdot dw}{8}$. Vis igitur hinc orta figuram ſurſum vrgens eſt $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}$; cuius directio tranſit per centrum grauitatis Q elementi

 BCb;

BCb; ex Q in Cb ducatur normalis ſeu verticalis Qq, erit C$q = \frac{2}{3}$ Cb $\frac{2}{3}$ CB $= \frac{1}{3}$ AB, momentum igitur huius vis ad reſtituendum eſt $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}(qo + GV)$. Denique elementum AC$a$ pari modo dabit vim $= \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}$, eiusque directio, quae eſt verticalis tranſit per eius centrum grauitatis P. Ducta ergo verticali Pp, erit $pC = \frac{2}{3}\,aC = \frac{2}{3}AC$. Momentum ergo huius vis contrarium erit prioribus ideoque $= -\frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8 \cdot AMFNB}(po - GV)$. Quia ergo hoc momentum a prioribus ſubtrahi debet ob aMFNb $=$ AMFNB $+$ BCb $-$ ACa, erit momentum, quo preſſio aquae in totam partem ſubmerſam aMFNb exerta aequilibrium reſtituit $= M.\,GO.\,dw + \frac{M \cdot AB^2 \cdot dw}{8\,AMFNB}(po + qo) = M.\,GO.\,dw + \frac{M \cdot AB^3 \cdot dw}{12\,AMFNB}$ ob $po + qo = pq = \frac{2}{3}AB$. Cum igitur momentum, quo figura in ſitum aequilibrii reſtituitur ſit $= M\,dw\,(GO + \frac{AB^3}{12\,AMFNB})$ erit per angulum dw diuidendo ſtabilitas, qua figura in ſitu aequilibrii AMFNB perſeuerat $= M\,(GO + \frac{AB^3}{12\,AFB})$ deſignante AFB aream partis ſubmerſae. Q. E. I.

Coroll. 1.

213. Patet ergo quod ſupra aſſeruimus, vim reſtituentem in ſitum aequilibrii proportionalem eſſe angulo, quo corpus ex ſitu aequilibrii eſt declinatum, ſi quidem angulus fuerit quam minimus, ideoque ſi ſtabilitas abſolute requiratur, angulum dw, quo inclinatio indicatur, omitti oportere. Sic igitur expreſſio ſtabilitatis momentis virium erit homogenea, cum ſit productum ex vi ſeu potentia M in lineam quandam rectam $GO + \frac{AB^3}{12\,AFB}$

Scho-

Scholion 1.

214. In expreſſione ſtabilitatis denotat GO diſtantiam centri grauitatis figurae a centro magnitudinis partis ſubmerſae, quando figura in aequilibrio exiſtit. Cum igitur poſuerimus in figura hac centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadere, per ſe patet, ſi in alio caſu centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis cadat, tum interuallum GO negatiue accipi debere, ita vt in huius modi caſibus ſtabilitas proditura ſit $= M(\frac{AB^3}{12 AFB} - GO)$. Hic ſcilicet figuras ex materia vtcunque heterogenea conſtantes conſideramus, ita vt centrum grauitatis G tam ſupra quam infra centrum magnitudinis O incidere poſſit; ſin autem figura ex materia homogenea confecta ponatur, tum neceſſario centrum grauitatis ſupra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadere oportet. Huius modi igitur caſibus ſtabilitas ſemper ex hac poſteriore formula erit aeſtimanda, in qua GO negatiuo ſigno afficitur.

Coroll. 2.

215. Quoties ergo centrum grauitatis infra centrum magnitudinis partis ſubmerſae cadit, tum ſitus aequilibrii ſemper erit firmus et ſtabilis, quia expreſſio ſtabilitatis negatiua fieri nequit.

Coroll. 3.

216. Sin autem centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadit, tum ſitus aequilibrii non erit ſtabilis, niſi fuerit $\frac{AB^3}{12.AFB} > GO$. At ſi fuerit $\frac{AB^3}{12.AFB} < GO$, ſitus erit inſtabilis ſeu labilis, et figura vel minime ex

 ſitu

ſitu aequilibrii declinata prolabetur, aliumque ſitum aequilibrii quaeret.

Coroll. 4.

217. Maximam igitur ſitus aequilibrii habebit ſtabilitatem, ſi centrum grauitatis profundiſſime, centrum magnitudinis autem in loco maxime eleuato fuerit ſitum; atque praeterea ſi ſectio aquae ſeu recta AB fuerit maxima: manente ſcilicet eodem figurae pondere M, quo ipſo magnitudo partis ſubmerſae etiam inuariata manet.

Coroll. 5.

218. In corporibus ergo aquae innatantibus, quo profundius pondera collocentur, eo maiorem ea ſtabilitatem in ſitu aequilibrii acquirent. Magis vero etiam ſtabilitas augebitur, ſi alis adiungendis ſectio aquae amplior reddatur.

Scholion 2.

219. Quamuis haec propoſitio tantum ad ſuperficies planas aquae verticaliter inſidentes ſit accommodata, tamen ea latius patet, et corpora cylindrica in ſe complectitur. Si enim corpus cylindricum aquae ita innatet, vt eius axis longitudinalis horinzontalem ſitum teneat, tum eius ſtabilitas reſpectu axis horizontalis eiusdem ex ſtabilitate cuiusque ſectionis transverſalis, quae eſt ſuperficies plana verticalis, cognoſcetur. His igitur caſibus AFB erit ſectionis mediae corporis cylindrici pars aquae ſubmerſa, G totius corporis centrum grauitatis, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae: M vero pondus totius corporis, et AFB vt ante cuiusque ſectionis pars aquae ſub-

ſubmerſa. Praeterea etiam ex eadem propoſitione pro corporibus alius figurae conſectaria deduci poſſent, ſed de iis in ſequentibus, cum omnis generis corpora ex inſtituto contemplabimur, fuſius tractabimus.

PROPOSITIO 21.
Problema.

220. *Si figura plana aquae in ſitu verticali inſidens ex ſitu aequilibrii aliquantillum declinetur, determinare motum, quo ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituet.*

Tab. XIII. fig. 1.

Solutio.

Sit figura plana A F B aquae inſiſtens in aequilibrio, cum praeter rectam per centrum grauitatis G ad planum figurae normaliter ductam etiam recta M G N fuerit horizontalis. Sit pondus figurae $= M$ atque A B ſectio aquae et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae A F B. Inclinetur nunc aliquantillum figura ex ſitu aequilibrii vt recta $\underline{a}\,\underline{b}$ fiat ſectio aquae, et angulus A C a fiat $= dw$. His poſitis ex prop. praeced. momentum reſtituens figuram in aequilibrium, quo ſcilicet figura circa axem horizontalem per G ad planum ipſius normaliter ductum circumvertetur, obtinebitur, ſi ſtabilitas ante inuenta per angulum inclinationis dw multiplicetur, eritque propterea hoc momentum ad corporis reſtitutionem tendens $= M\, dw\,(GO + \frac{AB^3}{12.AFB}.)$ Quoties igitur haec expreſſio fuerit affirmatiua, figura in ſitum aequilibrii reſtituetur, atque reſtitutio fiet rotando circa centrum grauitatis G, dum interea ipſum centrum grauitatis G recta vel aſcendit vel deſcen-

deſcendit, prout conditio ea, qua ſemper aequalis pars aquae debet eſſe ſubmerſa, requirit. Cum ergo hoc momentum angulo percurrendo ſit proportionale, figura eodem modo in ſtatum aequilibrii perueniet, quo pendulum deſcendendo ad ſitum verticalem accedens. Hancobrem figura oſcillationes inſtar penduli perficiet, donec totus motus a reſiſtentia fuerit conſumtus. Iſte motus oſcillatorius ergo cognoſcetur, ſi longitudo penduli ſimplicis determinetur, quod ſuas oſcillationes aequalibus temporibus abſoluat. Ad hoc vero pendulum aſſignandum neceſſe eſt, vt momentum inertiae figurae reſpectu axis circa quem gyratur conſtet. Sit igitur S momentum inertiae figurae ſeu aggregatum omnium particularum per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe rotationis multiplicatarum, qui axis ad figuram normaliter per G tranſit. Hinc igitur erit vis gyratoria $= \frac{Mdw}{S}\left(GO + \frac{AB^3}{12.AFB}\right)$, ex qua prodibit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillationes iſochronas cum oſcillationibus figurae abſoluit $= \frac{12S.AFB}{12M \cdot GO \cdot AFB + M.AB^3}$. Prodit enim perpetuo longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſi angulus inclinationis per vim gyratoriam diuidatur, id quod facile ex principiis mechanicis colligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

221. Longitudo ergo penduli iſochroni aequatur momento inertiae figurae reſpectu axis gyrationis diuiſo per ſtabilitatem figurae reſpectu eiusdem axis, prout quidem ſtabilitatem exprimere conſtituimus.

Co-

Coroll. 2.

222. Manente igitur eadem figurae ſtabilitate in ſuo aequilibrii ſitu oſcillationes eo erunt celeriores, quo minus fuerit momentum inertiae figurae, maximo autem exiſtente hoc momento, oſcillationes tardiſſimae fient.

Coroll. 3.

223. Manente autem eodem figurae momento inertiae oſcillationes eo crebriores euenient, quo maior fuerit figurae ſtabilitas; minuta autem ſtabilitate, oſcillationes ſegniores perficientur.

Coroll. 4.

224. Ad motum oſcillatorium ergo definiendum praeter pondus et figuram et centrum grauitatis, quae ad ſtabilitatem cognoſcendam ſufficiunt, noſſe oportet momentum inertiae figurae reſpectu axis, circa quem oſcillationes fiunt.

Scholion.

225. Quo tam ſtabilitas quam motus oſcillatorius huiusmodi figurarum aquae innatantium clarius cognoſcatur, iuuabit caſus ſpeciales conſideraſſe, in quibus quantitates adhuc indeterminatas determinari et inter ſe comparari licebit. Determinatas igitur figuras contemplabimur, quae aquae inſidant, vbi quidem ſufficiet figuram partis ſubmerſae poſuiſſe, cum figura partis ſupra aquam eminentis in computum non ingrediatur: Ex figura vero partis ſubmerſae ſimul centrum eius magnitudinis datur. Conveniet au-

 tem

tem tantum figuras regulares, quae circa verticalem EF partes ſimiles et aequales habeant, inueſtigaſſe, ne ante opus ſit ſitum aequilibrii inuenire. Ponemus igitur centrum grauitatis huiusmodi figurarum in ipſa verticali EF, quae eſt diameter, ſitum, quo aequilibrium habeatur, ſi iſta diameter verticalem ſitum obtinuerit. Eiusmodi ergo propoſitiones aliquot hic ſubiungemus, antequam ad ipſa corpora examinanda progrediamur.

PROPOSITIO 22.

Problema.

Tab. XIII. fig. 2.

226. *Si figurae aquae inſidentis pars ſubmerſa* AFB *fuerit triangulum iſoſceles; determinare ſtabilitatem huius ſitus, atque motum oſcillatorium, quem figura, ſi ex hoc ſitu aliquantillum declinetur, acquiret.*

Solutio.

Ex vertice F in baſin AB, quae ſectionem aquae repraeſentat, ducatur perpendicularis FC baſin AB bifariam ſecans in C. Ponatur $AC = BC = a$; et perpendiculum $FC = b$; erit pars ſubmerſa $AFB = ab$, eiusque centrum magnitudinis in O, vt ſit $CO = \frac{1}{3}b$. Sit porro G centrum grauitatis totius figurae, atque $CG = h$, erit $GO = CG - CO = h - \frac{1}{3}b$. Vocetur deinde maſſa ſeu pondus totius figurae $= M$, et momentum eius reſpectu axis normaliter ad planum AFB per G tranſeuntis $= S$. His igitur poſitis erit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M(h - \frac{1}{3}b + \frac{2a^2}{3b}) = \frac{M(2a^2 - b^2 + 3bh)}{3b}$. Penduli vero ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus huius figurae oſcillantis lon-

longitudo erit $= \frac{3bS}{M(2a^2 - b^2 + 3bh)}$, ſi quidem ſtabilitas affirmatiuum habuerit valorem. Q. E. I.

Coroll. 1.

227. Si ergo fuerit $2a^2 + 3bh > b^2$ ſeu $h > \frac{b^2 - 2a^2}{3b}$, ſitus iſte aequilibrii erit ſtabilis, eoque maior erit ſtabilitas, quo maior fuerit iſte exceſſus.

Coroll. 2.

228. Hic porro ſitus aequilibrii erit indifferens, ſi fuerit $2a^2 + 3bh = b^2$; ſin autem fuerit $2a^2 + 3bh < b^2$, tum ſitus erit labilis, eumque figura tenere non poterit, ſed vel tantillum ex eo deturbata prolabetur.

Exemplum.

229. Si integra figura fuerit triangulum iſoſceles MFN. conſtans ex materia vniformi, cuius ad aquam grauitas ſpecifica teneat rationem $p:q$. ponanturque $ML = LN = A$, et $FL = B$, tum $AC = BC = a$ et $FC = b$, erit $ab : AB = p : q$, atque ob $a : b = A : B$ erit $a = A\sqrt{\frac{q}{q}}$ et $b = B\sqrt{\frac{p}{q}}$. Deinde vero erit $LG = \frac{1}{3}B$, atque ob $LC = B - B\sqrt{\frac{p}{q}}$ habebitur $CG = h = B\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}B$. Manente autem maſſa ſeu pondere figurae $= M$, erit momentum $S = \frac{M(MN^2 + MF^2 + NF^2)}{36}$ (170.) $= \frac{M(3A^2 + B^2)}{18}$. His ſubſtitutis reperietur ſtabilitas trianguli iſoſcelis MFN aquae innatantis, ita vt baſis MN horizontaliter extra aquam emineat, $= \frac{M(2(A^2 + B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 2B^2)}{3B}$. Quae ſi fuerit

 affir-

affirmatiua, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{B(3A^2+B^2)}{12(A^2+B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} - 12B^2}$.

Coroll. 1.

230. Stabilis ergo erit iſte trianguli aquae inſidentis ſitus aequilibrii, ſi fuerit $(A^2+B^2)\sqrt{\frac{p}{q}} > B^2$ ſeu $\frac{p}{q} > \frac{B^4}{(A^2+B^2)^2}$ hoc eſt $\frac{p}{q} > \frac{LF^4}{MF^4}$. Labilis vero erit ſi $\frac{p}{q} < \frac{LF^4}{MF^4}$.

Coroll. 2.

231. Si triangulum fuerit aequilaterum, erit $B = A\sqrt{3}$; atque ſtabilitas eius in hoc aequilibrii ſitu prodibit $= \frac{2AM(4\sqrt{\frac{p}{q}} - 3)}{3\sqrt{3}}$. Longitudo vero penduli iſochroni erit $= \frac{A\sqrt{3}}{8\sqrt{\frac{p}{q}} - 6}$.

Coroll. 3.

232. Hoc ergo caſu ſitus aequilibrii erit ſtabilis, ſi $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{3}{4}$, hoc eſt ſi $\frac{p}{q} < \frac{9}{16}$. Poſita ergo grauitate ſpecifica aquae $q = 1000$, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $p > 562\frac{1}{2}$: inſtabilis autem erit, ſi grauitas ſpecifica trianguli minor eſt quam $562\frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

233. Si angulus ad F fuerit rectus, vt ſit $B = A$, erit ſtabilitas $= \frac{2AM(2\sqrt{\frac{p}{q}} - 1)}{3}$. Situs ergo aequilibrii erit ſtabilis, ſi, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$, trianguli

anguli grauitas ſpecifica maior fuerit quam 250. Sin autem trianguli grauitas minor ſit quam 250, ſitus aequilibrii erit inſtabilis. Longitudo vero penduli iſochroni illo caſu fiet $= \frac{A}{6\sqrt{\frac{p}{q}} - 3}$.

PROPOSITIO 23.

Problema.

Tab. XIIII fig. 1.

234. *Si figura aquae inſidens fuerit triangulum iſoſceles* FMN *baſem* MN *ſub aqua in ſitu horizontali ſectioni aquae* AB *parallelo habens poſitam; ſeu potius, ſi pars ſubmerſa* AMNB *fuerit trapezium, in quo latera* AB *et* NM *ſunt inter ſe parallela, angulique ad* M *et* N *aequales: determinare ſtabilitatem qua iſte ſitus aequilibrii conſeruatur, motumque oſcillatorium, quem eiusmodi figura, ſi aliquantillum ex ſitu aequilibrii deturbetur acquiret.*

Solutio.

Ducta recta verticali CL, quae tam ſectionem aquae AB, quam baſin MN biſecet, in hac poſitum erit centrum magnitudinis partis ſubmerſae O. Quare neceſſe eſt, vt in eandem rectam centrum grauitatis totius figurae incidat, quod ſit in G. Ponatur $AC = BC = a$: $ML = LN = c$: $CL = b$: et $CG = h$. Centrum magnitudinis vero partis ſubmerſae O ita ſecundum praecepta ſtatica reperietur vt ſit $CO = \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$; erit ergo $GO = h - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)}$. Denotet preterea M maſſam totius figurae, atque S eiusdem momentum inertiae reſpectu axis ad figuram normaliter per centrum grauitatis G tranſeuntis. Cum ergo pars immerſa AMNB ſit $= b(a+c)$, erit $\frac{AB^3}{12 AMNB} = \frac{2a^3}{3b(a+c)}$

vnde prodit ſtabilitas figurae in iſto ſitu aequilibrii $= M \left(b - \frac{b(a+2c)}{3(a+c)} + \frac{2a^3}{3b(a+c)}\right) = \frac{M(3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3)}{3b(a+c)}$. Longitudo denique penduli ſimplicis cum oſcillationibus figurae iſochroni erit $= \frac{3b(a+c)S}{M(3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

235. Huiusmodi ergo figurae, cuius pars aquae ſubmerſa eſt AMNB, ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3 > 0$: hoc eſt ſi fuerit $b > \frac{b^2(a+2c) - 2a^3}{3b(a+c)}$. Atque eo maior erit ſtabilitas, quo maiorem habuerit valorem iſta expreſſio $3bb(a+c) - b^2(a+2c) + 2a^3$ ſeu iſta $b - \frac{b^2(a+2c)+2a^3}{3b(a+c)}$.

Coroll. 2.

236. Contra vero ſi fuerit $b < + \frac{b^2(a+2c)-2a^3}{3b(a+c)}$ figurae ſitus iſte aequilibrii erit inſtabilis et ſubuerſioni obnoxius. Indifferens vero erit aequilibrii ſitus, ſi fuerit $b = \frac{b^2(a+2c)-2a^3}{3b(a+c)}$ in quo nullam omnino habebit ſtabilitatem.

Coroll. 3.

237. Si fiat $c = a$, pars figurae ſubmerſa erit rectangulum; his igitur caſibus erit ſtabilitas, qua figura in hoc ſitu perſiſtit $= M\left(b - \frac{b}{2} + \frac{aa}{3b}\right)$.

Coroll. 4.

238. Si ponatur $c = 0$, pars ſubmerſa fiet triangulum iſosceles, qui eſt caſus in praecedente propoſitione tractatus; reperitur autem ſtabilitas omnino vt ante $M\left(b - \frac{b}{3} + \frac{2aa}{3b}\right)$.

Exemplum.

239. Sit tota figura aquae innatans triangulum iſoſceles ex materia vniformi conſtans, cuius grauitas ſpecifica

fica ad aquam teneat rationem $p:q$. Ponatur $ML = NL = A$, et perpendiculum $FL = B$; erit ergo $c = A$; et $FC = B - b$. Quamobrem habebitur $FL.\ ML : FC.\ AC = q : q-p$ hoc est $AB : a(B-b) = q : q-p$ atque ob $FC : AC = FL : ML$; erit $B-b : a = B : A$ seu $a = \frac{A(B-b)}{B}$, quo valore in illa analogia substituto erit $AB^2 : A(B-b)^2 = q : q-p$ seu $q(B-b)^2 = (q-p)B^2$; vnde oritur $pB^2 = q(2Bb-bb)$ siue $b = B - \frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. hincque $a = \frac{A\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Cum vero sit $FG = \frac{2}{3}B$: erit $CG = b = \frac{2}{3}B - \frac{B\sqrt{(q-p)}}{\sqrt{q}}$. Si nunc haec omnia substituantur in formula stabilitatem huius situs exprimente, reperietur ipsa stabilitas $= \frac{2M(q-p)}{3Bp}\left((A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} - B^2\right)$. Momentum autem inertiae huius figurae est vt ante $= \frac{M(3A^2+B^2)}{18}$. Quocirca si stabilitas fuerit affirmatiua, erit longitudo penduli simplicis isochroni

$$= \frac{Bp(3A^2+B^2)}{12(q-p)(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 12(q-p)B^2}.$$

Coroll. 2.

240. Huius igitur trianguli hac ratione aquae insidentis situs erit stabilis, si fuerit $(A^2+B^2)\sqrt{\frac{q-p}{q}} > B^2$; seu $\frac{q-p}{q} > \frac{B^4}{(A^2+B^2)^2}$ hoc est si $\frac{q}{q} < \frac{A^2(A^2+B^2)}{(A^2+B^2)^2}$. Instabilis autem erit situs iste aequilibrii, si fuerit $\frac{p}{q} > \frac{A^2(A^2+2B^2)}{(A^2+B^2)^2}$

Coroll. 1.

231. Si haec conferantur cum probl. praeced. (230) apparebit idem triangulum duplicem aequilibrii situm habere posse stabilem, si fuerit $A^4 + 2A^2B^2 > B^4$ seu $A^2 > B^2(\sqrt{2}-1)$, hoc est si fuerit $FM > FL\sqrt[4]{2}$. Quod eue-

euenit, ſi fuerit angulus $MFL > 33°$ ſeu ang. $MFN > 66°$. Hoc vero accidente erunt ipſius $\frac{p}{q}$ limites isti $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FL^4}{FM^4}$; inter quos ſemper continetur caſus quo $p:q = 1:2$; ſeu quo figura duplo leuior eſt quam aqua.

Coroll. 3.

242. Intelligitur porro fieri poſſe, vt neuter ſitus aequilibrii trianguli iſoſcelis, quo baſis eſt horizontalis, habeat ſtabilitatem; quod accidit ſi fuerit ang. $MFN > 66°$; atque $\frac{p}{q}$ inter hos limites $\frac{FL^4}{FM^4}$ et $\frac{FM^4 - FL^4}{FM^4}$ contineatur, quorum ille eſt maior, hic vero minor. Inter hos autem limites continetur iterum ſemper caſus, quo $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$.

Coroll. 4.

243. Abeat triangulum iſoſceles in aequilaterum; quo caſu fit $B = A\sqrt{3}$. Hanc obrem erit ſtabilitas trianguli aequilateri modo in figura expreſſo aquae inſidentis $= \frac{2AM(q-p)}{3p\sqrt{3}}\left(4\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 3\right)$.

Coroll. 5.

244. Huius ergo trianguli aequilateri tali ſitu aquae inſidentis ſitus erit ſtabilis, ſi fuerit $\sqrt{\frac{q-p}{q}} > \frac{3}{4}$ ſeu $\frac{q-p}{q} > \frac{9}{16}$, id quod accidit ſi fuerit $\frac{p}{q} < \frac{7}{16}$. Poſita igitur grauitate ſpecifica aquae $= 1000$; ſitus erit ſtabilis, ſi trianguli grauitas ſpecifica fuerit $< 437\frac{1}{2}$.

Coroll. 6.

245. Si angulus MFN fuerit rectus, ſeu $B = A$; erit ſtabilitas $= \frac{2AM(q-p)}{3p}\left(2\sqrt{\frac{q-p}{q}} - 1\right)$, ſitus aequilibrii ergo ſta-

ſtabilis erit, ſi fuerit $\frac{q-p}{q} > \frac{1}{4}$ ſeu $\frac{p}{q} < \frac{3}{4}$. Hoc ergo accidit, ſi grauitas ſpecifica trianguli fuerit < 750, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$.

Scholion.

246. Quamuis hae propoſitiones figuras tantum planas ſcilicet triangula reſpiciant, tamen eae quoque, vti iam notaui, ad corpora accommodari poſſunt, quorum omnes ſectiones transuerſales ſunt triangula aequalia iſoſcelia; cuius modi ſunt prismata triangularia. Ope variorum igitur huiusmodi priſmatum, quorum baſes ſunt triangula iſoſcelia varii generis veritas eorum, quae ex iſtis propoſitionibus deduximus, per experientiam comprobari poterit. In his ceterum propoſitionibus eos tantum triangulorum iſoſcelium aquae inſidentium ſitus examinauimus, in quibus baſes horizontalem obtinent ſitum, praetermiſſis reliquis aequilibrii ſitibus, cum ad calculos nimis prolixos euitandos, tum vero praecipue, quia de ſtabilitate horum reliquorum ſituum ex caſibus pertractatis ſatis tuto indicare licet. In ſequentibus enim demonſtrabitur inter plures aequilibrii ſitus, quibus corpus quodque aquae innatare poteſt, alternos eſſe ſtabiles, alternos inſtabiles. Quare cum hic eorum caſuum praecipuorum, quibus triangula iſoſcelia aquae innatare poſſunt, ſtabilitatem determinauerimus, de reliquis caſibus facile iudicium ferri poterit. Si enim ſtatus quidam aequilibrii fuerit inſtabilis, ii ſitus, qui vtrinque proxime occurrent, certo erunt ſtabiles, niſi duo in vnam coaleſcant, quo caſu ſitus aequilibrii erit indifferens.

PROPOSITIO 24.
Problema.

247. *Si figurae aquae insidentis pars submersa* AIHB *fuerit quadrilaterum rectangulum; determinare stabilitatem, qua figura in hoc aequilibrii situ perseuerat; atque motum oscillatorium, quo figura ex hoc situ parumper declinata nutabit.*

Tab. XIIII. fig. 2.

Solutio.

Ducatur verticalis C L parallelogrammum rectangulum AIHB bifariam secans, in cuius puncto medio O situm erit centrum magnitudinis partis submersae; in eandem igitur cadet centrum grauitatis totius figurae, quod sit in G. Ponatur nunc $AC = BC = \frac{a}{2}$; seu $AB = a$ atque $AI = BH = CL = b$; et $CG = h$; erit $CO = \frac{1}{2}b$ atque $OG = h - \frac{1}{2}b$; massa denique totius figurae sit $= M$. Stabilitas igitur, qua figura in hoc aequilibrii situ persistit, quae generaliter est $= M\left(GO + \frac{AB^3}{12 \cdot AIHB}\right)$, erit pro hoc casu $= M\left(h - \frac{1}{2}b + \frac{a^2}{12b}\right) = \frac{M(a^2 - 6bb + 12bh)}{12b}$. At ad oscillationes definiendas, quas figura circa hunc aequilibrii situm absoluet, sit momentum inertiae figurae respectu puncti $G = S$, hincque reperietur longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{12Sb}{M(a^2 - 6bb + 12bh)}$, ex quo tempus, quo minimae vacillationes absoluuntur, determinatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

248. Quo ergo iste aequilibrii situs conseruetur, necesse est vt $a^2 - 6bb + 12bh$ sit quantitas positiua, id quod

quod euenit ſi fuerit $b > \frac{6bb - aa}{12b}$. At ſi fuerit $b = \frac{6bb - aa}{12b}$ tum aequilibrii ſitus erit indifferens, labilis vero et ſubuerverſioni obnoxius erit, ſi fuerit $b < \frac{6bb - aa}{12b}$.

Coroll. 2.

249. Bacillus igitur admodum gracilis aquae in ſitu verticali inſidere poterit, ſi fuerit $b > \frac{b}{2}$ ob graſſitiem a fere euaneſcentem. Hoc ergo eueniet, ſi eius centrum grauitatis in inferiorem partis ſubmerſae medietatem ſeu infra punctum medium eius cadit.

Coroll. 3.

250. Niſi ergo inferior bacilli pars ſit notabiliter ponderoſior, quam pars ſuperior, bacillus in aqua ſitum verticalem tenere non poterit. Ex formula autem inuenta determinari licebit, quantum plumbi ſeu alius materiae aqua grauioris bacillo in inferiore parte ſit adiungendum, quo ſitus verticalis ſubſiſtat.

Exemplum.

251. Sit tota figura aquae inſidens parallelogrammum EIHF ex materia vniformi conſtans, cuius grauitas ſpecifica ad aquam teneat rationem $p:q$: ſitque eius longitudo $EF = IH = A$, et latitudo $EI = FH = B$; erit $a = A$; et $B:b = q:p$ vnde fit $b = \frac{Bp}{q} = CL$; at $KG = LG = \frac{1}{2}B$ hinc igitur prodibit $CG = CL - LG = \frac{Bp}{q} - \frac{1}{2}B = b$. His in formula ſtabilitatem exprimente ſubſtitutis reperietur $\frac{M(A^2q^2 - B^2pq + 6B^2p^2)}{12Bpq}$, qua expreſſione ſtabilitas huius aequilibrii ſitus definitur. Momentum inertiae vero

 huius

huius figurae respectu eius centri grauitatis G est $= \frac{M(A^2+B_2)}{12}$ ex quo obtinebitur longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{Bpq(A^2+B^2)}{A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2}$, vnde oscillationes huius aequilibrii situs, si quidem fuerit stabilis, cognoscentur.

Coroll. 1.

252. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis requiritur vt sit $A^2q^2-6B^2pq+6B^2p^2 > 0$ seu $A > \frac{B}{q}\sqrt{(6pq-6pp)}$. Data ergo materiae, ex qua rectangulum constat grauitate specifica, hinc ratio laterum A et B innotescit, qua fit vt rectangulum latere B verticali, et latere A horizontali aquae innatare queat.

Coroll. 2.

253. Ex his simul intelligitur idem hoc rectangulum aquae innatare posse latere A existente verticali, B vero horizontali, si fuerit $B > \frac{A}{q}\sqrt{(6pq-6pp)}$.

Coroll. 3

254. Horum duorum igitur aequilibrii situum vterque poterit esse stabilis, si tam $\frac{A}{B}$ quam $\frac{B}{A}$ maius fuerit quam $\frac{\sqrt{(6pq-6pp)}}{q}$. Hoc autem accidere nequit, nisi sit $q > \sqrt{(6pq-6pp)}$ seu $qq > 6pq-6pp$. Id quod accidit duplici modo, primo scilicet si fuerit $\frac{q}{p} > 3+\sqrt{3}$, secundo si fuerit $\frac{q}{p} < 3-\sqrt{3}$.

Coroll. 4.

255. Quo ergo parallelogrammum rectangulum vtroque situ aquae firmiter innatare possit, materiae ex qua

qua conſtat grauitas ſpecifica vel maior eſſe debebit quam 788. $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$ poſita aquae grauitate 1000. Horum caſuum vtroque latera parallelogrammi ita inter ſe adornari poſſunt, vt vterque aequilibrii ſitus fiat ſtabilis.

Coroll. 5.

256. Si igitur materiae, ex qua rectangulum conficitur, grauitas ſpecifica contineatur inter hos limites 788 $\frac{2}{3}$ et 211 $\frac{1}{3}$, tum nullum rectangulum confici poteſt, quod vtroque ſitu aquae firmiter inſidere queat.

Coroll. 6.

257. At ſi data fuerint rectanguli latera A et B requiritur ad hoc vt rectangulum, latere A exiſtente horizontali et B verticali, aquae firmiter inſidere queat, vt ſit vel $\frac{q}{p} > \frac{3B^2 + B\sqrt{(9B^2 - 6A^2)}}{A^2}$ vel $\frac{q}{p} < \frac{3B^2 - B\sqrt{(9B^2 - 6A^2)}}{A^2}$, ſiue neceſſe eſt vt ſit vel $p < \frac{q(3B - \sqrt{(9B^2 - 6A^2)})}{6B}$ vel $p > \frac{q(3B + \sqrt{(9B^2 - 6A^2)})}{6B}$.

Coroll. 7.

258. Si ergo rectangulum abeat in quadratum, fiatque $B = A$, tum ſitus aequilibrii, quo alterum latus horizontale alterum verticale exiſtit, erit ſtabilis, ſi fuerit vel $p < \frac{q(3 - \sqrt{3})}{6}$ vel $p > \frac{q(3 + \sqrt{3})}{6}$ hoc eſt, ſi denotante 1000, grauitatem aquae, grauitas ſpecifica quadrati vel maior fuerit quam 788 $\frac{2}{3}$ vel minor quam 211 $\frac{1}{3}$.

Scholion.

259. Quae in hac propoſitione ſunt determinata, etiamſi ad figuras tantum planas pertinere videantur, tamen

men ad omnis generis parallelepipeda rectangula pertinent; ex iis enim, quouis parallelepipedo propoſito, diiudicare licet, quanta ſtabilitate ſuper quaque hedra aquae innatare poſſit. Deinde vltimum exempli corollarium ad cuborum natatum ſuper aqua inueſtigandum eſt apprime accommodatum, ſi quidem cubi vel ex materia homogenea ſint confecti, vel ſaltem centrum grauitatis in ſui medio habeant ſitum. Intelligitur autem eiusmodi cubos aquae in ſitu erecto, quo binae hedrae ſunt horizontales, reliquae verticales, innatare non poſſe, niſi eorum grauitas ſpecifica vel maior fuerit quam $788\frac{2}{3}$ vel minor quam $211\frac{1}{3}$, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$. Quoties ergo cubi grauitas ſpecifica inter hos limites continetur, maior ſcilicet eſt quam $211\frac{1}{3}$ minor tamen quam $788\frac{2}{3}$, tum talis cubus ſitu erecto aquae neutiquam inſidere poterit, ſed ſitum induet alium, quo vel planum diagonale, vel ipſa diagonalis ſitum horizontalem vel verticalem occupabit. Quanta vero in iſtius modi ſitibus futura ſit ſtabilitas, ex ſequente propoſitione colligere licebit, in qua quidem tantum quadratum aquae ita inſidens, vt altera diagonalis horizontalem, altera verticalem ſitum habeat, examini ſum ſubiecturus.

PROPOSITIO 25.
Problema.

Tab. XIIII. fig. 3 et 4.

260. *Quadrati* EIHF *quod aquae ita inſidit, vt eius diagonalis* EH *ſitum verticalem obtineat, ſtabilitatem definire, qua in hoc ſitu perſeuerat, atque motum oſcillatorium circa hunc aequilibrii ſitum.*

Solu-

Solutio.

Duplex hic casus est euoluendus, prout vel maior vel minor pars quam dimidia aquae immergitur, quorum illud accidit, si fuerit $p > \frac{1}{2}q$ hoc vero si $p < \frac{1}{2}q$, denotante $p:q$ rationem quam tenet pondus quadrati ad pondus aequalis voluminis aquae. Sit autem latus quadrati $= A$; et posito quadrati centro grauitatis in G sit HG $= b$. His praemissis in genere consideremus primo casum quo est $p < \frac{1}{2}q$, atque pars submersa fit triangulum AHB, sectione aquae existente AB. Erit ergo AC. CH seu $AC^2 : A^2 = p:q$ ideoque $AC = CH = A\sqrt{\frac{p}{q}}$, centrum grauitatis partis submersae vero cadet in O, vt sit HO $= \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{p}}$. Quamobrem erit $GO = -b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}}$. Hinc igitur prodibit stabilitas huius situs aequilibrii $= M(-b + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} + \frac{2}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}}) = M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)$. Denique posito momento inertiae quadrati respectu centri grauitatis $G = S$, erit longitudo penduli simplicis $= \frac{S}{M(\frac{4}{3}A\sqrt{\frac{p}{q}} - b)}$, quod oscillationes isochronas vacillationibus quadrati absoluet. Q. E. Alterum

fig. 3.

Sit nunc $p > \frac{1}{2}q$, quo casu maior pars AIHFB quam dimidia aquae immergitur existente AB sectione aquae. Erit ergo $A^2 - AC^2 : A^2 = p:q$, et diuidendo $AC^2 : A^2 = p - p:q$ vnde fit $AC = CE = A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$ atque $CH = A\sqrt{2} - A\sqrt{\frac{q-p}{q}}$. Ex his inuenitur centrum magnitudinis partis submersae in O ita vt sit $HO = A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2}{3}\frac{A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{p\sqrt{q}}$ hincque erit $GO = b + A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{2A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}}$ ipsa vero pars submersa erit $= \frac{A^2p}{q}$. Quocirca stabilitas huius aequilibrii situs erit

fig 4.

$= M$

$= M\left(-b + A\sqrt{2} - \frac{Aq}{p\sqrt{2}} + \frac{4A(q-p)\sqrt{(q-p)}}{3p\sqrt{q}}\right)$ per quam si diuidatur momentum figurae respectu centri grauitatis G, quod sit S, prodibit longitudo penduli simplicis, quod oscillationes circa hunc aequilibrii situm indicabit. Q. E. Alterum.

Coroll. 1.

261. Si centrum grauitatis quadrati cadat in eius punctum medium, quo casu fit $b = \frac{A}{\sqrt{2}}$; erit casu priore quo $p < \frac{1}{2}q$ stabilitas $= AM\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: posteriore vero casu, quo $p > \frac{1}{2}q$ stabilitas erit $= AM\frac{(q-p)}{p}\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{q-p}{q}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Coroll. 2.

fig. 3. 262. Quadratum ergo ex materia vniformi constans, quod plusquam duplo leuius est quam aqua, in situ diagonalis verticali aquae firmiter insidebit, si fuerit $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoc est si fuerit $\frac{p}{q} > \frac{9}{32}$. Posita ergo aquae grauitate specifica 1000, stabilitatem habebit iste aequilibrii situs, si fuerit quadrati grauitas specifica minor quam 500, maior vero quam $281\frac{1}{4}$.

Coroll. 3.

fig. 4. 263. Quadratum vero ex materia plus quam duplo graviore quam aqua constans in situ diagonalis verticali firmiter aquae innatabit, si fuerit $\frac{q-p}{q} > \frac{9}{32}$ seu $\frac{p}{q} < \frac{23}{32}$ Hoc ergo accidit, si eius grauitas specifica fuerit maior quam 500, minor vero quam $718\frac{3}{4}$.

Coroll. 4.

264. Ante autem inuenimus quadratum aquae ita innatare non posse, vt bina latera teneant horizontalem, bina

bina vero verticalem ſitum, ſi eius grauitas ſpecifica contineatur intra limites $211\frac{1}{3}$ et $788\frac{2}{3}$. Quamobrem eiusmodi quadrata, quorum grauitas ſpecifica continetur vel intra hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$ vel intra hos $788\frac{2}{3}$ et $718\frac{3}{4}$, neque ſitu erecto neque diagonali verticaliter poſita aquae innatare poſſunt.

Scholion.

265. Hinc diiudicari poſſunt natationes prismatum ex materia homogenea confectorum, quorum baſes ſunt quadrata, in aqua ſi quidem axes ſitum teneant horizontalem ſiue baſes verticaliter ſint poſitae. Triplici enim modo eiusmodi prismata aquae inſidebunt, pro varia grauitatis ſpecificae ratione. Primo ſcilicet hedrae binae horizontalem, binae vero verticalem ſitum tenebunt, ſi prismatis grauitas ſpecifica vel minor fuerit quam $211\frac{1}{3}$ vel maior quam $788\frac{2}{3}$. Secundo duorum planorum diagonalium alterum verticaliter alterum vero horizontaliter erit poſitum, ſi prismatis grauitas ſpecifica contineatur inter limites $281\frac{1}{4}$ et $718\frac{3}{4}$ Neutro denique horum modo, ſed ſitu ad vtrumque obliquo prisma aquae innatabit, ſi eius grauitas ſpecifica contineatur vel inter hos limites $211\frac{1}{3}$ et $281\frac{1}{4}$, vel inter hos $718\frac{3}{4}$ et $788\frac{2}{3}$. Si quis hoc experimentis comprobare voluerit, prismata ſatis longa adhiberi oportet, quo eorum axes ſemper horizontaliter aquae incumbant: breuiora enim huiusmodi prismata ad iſtud negotium minus ſunt idonea, cum ea pluribus quam tribus dictis modis aquae innatare queant, eo quod alii etiam axes inter natandum ſitum horizontalem conſtanter ſeruare poſſint, quae varietas in longioribur locum non habet.

PROPOSITIO 26.

Problema.

Tab. XV. fig. 1.

266. *Determinare ſtabilitatem, qua figura quaecunque curuilinea* AFB *circa axem* FC *vtrinque partes ſimiles et aequales habens in ſitu aequilibrii aquae inſidet.*

Solutio.

Sit AFB pars aquae immerſa et AB ſectio aquae, erit FC linea verticalis et ſimul diameter orthogonalis figurae, ita vt ſit $AC = BC$. Denotet M totius figurae maſſam, eiusque centrum grauitatis ſit in G, exiſtente $FG = h$. Ponatur porro $FC = x$ et $AC = BC = y$, ita vt aequatio inter x et y naturam curuae propoſitae exprimat. Sit iam O areae AFB aquae ſubmerſae centrum magnitudinis, erit $FO = \frac{\int yxdx}{\int ydx}$, ideoque $GO = \frac{\int yxdx}{\int ydx} - h$. Quia vero tota area aquae immerſa eſt $= 2\int ydx$, reperietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus $= M(\frac{\int yxdx}{\int ydx} - h + \frac{y^3}{3\int ydx})$, quae expreſſio in hanc commodiorem ſaepius poteſt transmutari $M(\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx} - h)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

267. Quoties ergo $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx}$ maius eſt quam h, toties iſte aequilibrii ſitus erit ſtabilis, eoque ſtabilior, quo maior fuerit exceſſus, $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx} - h$.

Coroll. 2.

268. At ſi fuerit $\frac{\int y(xdx + ydy)}{\int ydx}$ vel aequale vel etiam minus quam h, tum illo caſu aequilibrii ſitus erit indifferens, hoc vero adeo inſtabilis vt minimum declinatus ſubuertatur.

Exem-

Exemplum 1.

269. Sit figura aquae immersa AFB segmentum circuli cuius radius sit $= a$, erit $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ et $y^2 + x^2 = 2ax$, vnde fit $y\,dy + x\,dx = a\,dx$. Hoc ergo casu habebitur $\int y\,dx = \int dx \sqrt{(2ax - xx)}$; et $\int y(x\,dx + y\,dy) = \int a\,dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Quocirca stabilitas huius aequilibrii situs erit $= M(a - b)$ quae ideo erit constans siue maius siue minus segmentum circuli aquae immergatur.

Coroll. 1.

270. Dummodo ergo figurae centrum grauitatis infra centrum circuli cadat, aequilibrium firmiter conseruabitur, idque eo magis, quo profundius situm erit centrum grauitatis.

Coroll. 2.

271. Sin autem centrum grauitatis in centrum circuli incidat, tum situs aequilibrii erit indifferens, quod euenit in cylindris homogeneis aquae horizontaliter incumbentibus.

Exemplum 2.

272. Sit figura aquae immersa AFB sectio conica quaecunque verticem in F et axem FC habens; erit $y = \sqrt{(2ax - nxx)}$ scilicet si n fuerit numerus affirmatiuus, curua erit ellipsis, sin negatiuus hyperbola, at si $n = 0$ tum curua abibit in parabolam. Erit ergo $y^2 + x^2 = 2ax - (n-1)xx$, et $y\,dy + x\,dx = a\,dx - (n-1)x\,dx$. Hinc igitur obtinebitur stabilitas, qua iste aequilibrii situs gaudet $= M\left(\frac{\int dx(a-(n-1)x)\sqrt{(2ax - nxx)}}{\int dx \sqrt{(2ax - nxx)}} - b\right) = M\left(a - b - \frac{(n-1)\int x\,dx \sqrt{(2ax - nxx)}}{\int dx \sqrt{(2ax - nxx)}}\right)$. Casu autem quo $n = 0$ atque curua in parabolam abit, erit stabilitas $= M(a - b + \frac{3}{5}x)$.

Coroll. 1.

273. Si puncta A, F et B tanquam fixa considerentur, atque stabilitates, quas variae sectiones conicae per ea transeuntes inter se comparentur, ponatur $CF = c$ et $AC = f$. ob $x = c$ et $y = \sqrt{(2ax - nxx)} = f$; erit $a = \frac{f^2 + nc^2}{2c}$.

Coroll. 2.

274. Casu ergo quo curua est circulus stabilitas erit $= M(\frac{ff+cc}{2c} - b)$. Casu autem quo curua est parabola, erit stabilitas $= M(\frac{ff + \frac{6}{5}cc}{2c} - b)$. Maiorem ergo habet stabilitatem parabola quam circulus per eadem tria puncta transiens.

Coroll. 3.

275. Est autem generaliter satis prope $\frac{(n-1)\int xdx\sqrt{(2ax-nxx)}}{\int dx\sqrt{(2ax-nxx)}} = \frac{3(n-1)x}{5}$. Quamobrem stabilitas erit $= M(a - b - \frac{3(n-1)x}{5})$ $= M(\frac{ff + \frac{(6-n)}{5}cc}{2c} - b)$. Stabilitas ergo eo erit maior, quo minor fuerit n.

Coroll. 4.

276 At n non vltra datum limitem diminui potest, quia a affirmatiuum habere debet valorem, estque $a = \frac{ff+ncc}{2c}$ ergo ad summum fieri potest $n = \frac{-ff}{cc}$ quo casu sectio conica abit in triangulum isosceles AFB, quod ergo hunc aequilibrii situm firmius conseruabit, quam vlla alia sectio conica per eadem puncta A, F, B transiens, atque centrum grauitatis in eodem puncto G habens.

Scholion

Scholion.

276. Abunde haec ſufficere poſſunt ad ſtabilitatem, quae in quolibet aequilibrii ſitu ineſt, cognoſcendam, ſi quidem corpus aequae innatans vel eſt figura plana tenuiſſima, vel inſtar talis conſiderari poteſt. Antequam autem ad ſtabilitatem corporum indagandam progrediar, proprietatem inſignem quam plures eiusdem corporis aequilibrii ſitus ratione ſtabilitatis inter ſe tenent, proferam et demonſtrabo.

PROPOSITIO 27.

Theorema.

277. *Si omnes ſitus, quibus figura data quaecunque in aqua aequilibrium tenere poteſt, conſiderentur, tum iſti aequilibrii ſitus alternatim erunt ſtabiles, et inſtabiles.*

Demonſtratio.

Pro quouis aequilibrii ſitu concipiatur per figurae centrum grauitatis ducta recta parallela ſectioni aquae atque per hanc ipſam rectam per centrum grauitatis ductam innoteſcet aequilibrii ſitus: manente enim iſta recta horizontali parallela, figura aquae eousque immergatur, donec pars debita ſub aqua exiſtat, quo facto habebitur ſitus aequilibrii. Ita in figura propoſita A C ac deſignent rectae Aa, Bb, Cc, Dd per centrum grauitatis G ductae omnes aequilibrii ſitus, qui in hac figura dantur, dentur ſcilicet quatuor aequilibrii ſitus, in quibus ſectiones aquae reſpectiue ſint parallelae rectis Aa, Bb, Cc, Dd; quibus poſitis dico, ſi ſitus aequilibrii Aa fuerit ſtabilis, tum

Tab. XV. fig. 2.

 quo-

quoque ſitum ab hoc computando tertium C*c* fore ſtabilem ſecundum vero B*b* et quartum D*d* fore inſtabiles. In hoc demonſtrando ita verſabor vt oſtendam inter duos ſitus ſtabiles neceſſario vnum ſitum inſtabilem contineri debere, pariter ac inter duos ſitus inſtabiles vnum ſtabilem, hoc enim probato veritas theorematis erit euicta. Sint igitur A*a* et C*c* duo aequilibrii ſitus ſtabiles inter ſe proximi, ſeu tales inter quos non detur alius ſitus ſtabilis. Si nunc figura ex ſitu A*a* verſus ſitum C*c* convertendo declinetur, tum primo quidem niſum habebit ſeſe in ſitum A*a* reſtituendi, at ſi propius ad ſitum C*c* peruenietur, tum figura niſum habebit ſeſe in ſitum aequilibrii C*c* recipiendi. Quamobrem neceſſe eſt vt inter duos hos ſitus ſtabiles A*a* et C*c* vna exiſtat poſitio puta B*b*, quam ſi figura tenet aequaliter ad vtrumque ſitum A*a* et C*c* propendeat, in hoc igitur ſitu dabitur aequilibrium, id vero inſtabile, quia figura tantillum ex eo declinata vel ad aequilibrii ſitum A*a* vel ad C*c* nititur; ex quo manifeſtum eſt, inter duos ſitus aequilibrii ſtabibiles neceſſario vnum aequilibrii ſitum inſtabilem contineri debere. Simili modo ſi ſint B*b* et D*d* duo aequilibrii ſitus inſtabiles, ſe immediate inſequentes, vterque ea praeditus erit proprietate, vt figura ſi ex vno ſitu verſus alterum declinetur, tum niſum habitura ſit recedendi ab illo aequilibrii ſitu; quamobrem neceſſario dabitur inter iſtos duos aequilibrii ſitus inſtabiles B*b* et D*d*, talis ſitus vti C*c*, in quo figura vtrumque illum aequilibrii ſitum aquae auerſabitur; in hoc igitur ſitu figura aequilibrium tenebit, idque ſtabile quia figura vtrinque ex eo declinata niſu gaudet ſeſe in illum reſtituendi. Cum igitur tam inter duos

duos ſitus ſtabiles vnus inſtabilis, quam inter duos inſtabiles vnus ſitus ſtabilis exiſtat, ſitus auquilibrii omnes tum ſtabiles tum inſtabiles ſe mutuo alternatim excipient. Q. E. D.

Coroll. 1.

278. In vnaquaque ergo figura aquae inſidente tot dabuntur aequilibrii ſitus ſtabiles, quot inſtabiles, et hanc obrem omnium aequilibrii ſituum numerus erit par.

Coroll. 2.

279. Nulla igitur figura pauciores duobus aequilibrii ſitus habere poteſt. Omnis enim figura vnum neceſſario habet ſitum ſtabilem et propterea vnum quoque inſtabilem.

Coroll. 3.

280. Definitis ergo pro quapiam figura omnibus ſitibus, quibus in aqua aequilibrium tenet, ſi de vnico conſtet, vtrum ſtabilis ſit an inſtabilis, ſimul de omnibus reliquis idem conſtabit.

Coroll. 4.

281. Interim tamen fieri poteſt, vt numerus aequilibrii ſituum in quapiam figura actu deprehendatur impar, id quod eueniet ſi duo aequilibrii ſitus proximi ſtabilis et inſtabilis in vnum confundantur, quo ſitus oritur, indifferens. Situs aequilibrii igitur indifferens ſpectari debet tanquam coniunctio duorum aequilibrii ſituum proximorum, ideoque pro duobus eſt numerandus.

Scho-

Scholion.

282. Veritas huius propoſitionis non ſolum ad figuras planas ſed etiam ad omnis generis corpora aquae innatantia patet. Quodcunque enim corpus aquae innatans, ſi in eandem plagam circumagatur tum alternatim ex ſitu aequilibrii ſtabili ad inſtabilem neceſſario peruenire debet, prout ex demonſtratione data intelligi licet; hocque modo res ſe habet in quamcunque plagam corpus circumagatur. Sed haec omnia clarius percipientur ex ſequentibus, vbi ſtabilitatem corporum quorumcunque aquae in aequilibrio inſidentium ſum inueſtigaturus.

Definitio.

283. Stabilitas reſpectu axis cuiusdam dati horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis eſt vis qua hoc corpus aquae in ſitu aequilibrii inſidens inclinationi circa eundem axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem reſiſtit.

Coroll. 1.

284. Stabilitas igitur reſpectu axis cuiusdam dati horizontalis per centrum grauitatis ducti aeſtimanda eſt ex momento preſſionis aquae, quo corpus angulo infinite paruo circa iſtum axem ex ſitu aequilibrii declinatum reſtituitur, diuiſo per ipſum illum angulum infinite paruum.

Coroll. 2.

285. In corporibus ergo aquae innatantibus ſtabilitas cuiusuis aequilibrii ſitus infinitis modis eſt aeſtimanda, pro infinitis axibus horizontalibus per centrum grauitatis

corporis

corporis transſeuntibus, circa quos corpus inclinando ex ſitu aequilibrii depelli poteſt.

Coroll. 3.

286. Fieri igitur poteſt vt idem aequilibrii ſitus reſpectu vnius pluriumue axium horizontalium ſit ſatis ſtabilis, qui tamen reſpectu reliquorum axium eſt inſtabilis. Semper autem in vnoquoque corpore oportet dari vnum aequilibrii ſitum, qui reſpectu omnium axium ſit ſtabilis; alioquin enim corpus ſuper aqua quieſcere non poſſet.

Coroll. 4.

287. Si autem corporis cuiuspiam aquae inſidentis aequilibrii ſitus fuerit ſtabilis reſpectu duorum axium horizontalium inter ſe normalium, tum iſte aequilibrii ſitus reſpectu omnium reliquorum axium erit ſtabilis. Inclinatio enim circa axes intermedios reſolui poteſt in inclinationes binas circa illos axes inter ſe normales, quae ambae cum praeditae ſint vi reſtituente, neceſſe eſt, vt iſte aequilibrii ſitus reſpectu omnium axium ſit ſtabilis.

Coroll. 5.

288. Ad corporis igitur aquae in aequilibrio inſidentis ſtabilitatem cognoſcendam, ſufficiet reſpectu duorum axium inuicem normalium ſtabilitatem inueſtigaſſe; cum inde ſtabilitas reſpectu cuiusvis alius axis pendeat, atque ſatis tuto aeſtimari queat.

Scholion.

289. Quamdiu figuras tantum planas aquae verticaliter innatantes ſumus contemplati, vnico modo ſtabilitatem

tatem cuiusque aequilibrii ſitus determinauimus, atque id etiam ſufficiebat, quia eiusmodi figuras circa vnicum axem horizontalem, normalem ſcilicet ad planum figurae, mobiles poſuimus; quilibet autem facile intelliget, huiusmodi figuras, quantumuis eae magnam habere inuentae ſunt ſtabilitatem, tamen ſubuerſioni ad latera maxime eſſe obnoxias. Simili modo perſpicuum eſt, naues inclinationi verſus proram puppimue multo fortius reſiſtere quam inclinationi ad latera, illoque proinde caſu maiorem habere ſtabilitatem quam iſto. Quamobrem cum nunc nobis ſit propoſitum in ſtabilitatem, quâ corpora quaecunque aquae inſidentia gaudent, inquirere, omnes inclinationes, quibus corpora ex ſitu aequilibrii declinari poſſunt, conſiderari oportet, atque definiri quanta vi cuique inclinationi reſiſtant. Infinitis autem modis corpus ex ſitu aequilibrii declinari poteſt, pro infinitis axibus horizontalibus per centrum grauitatis tranſeuntibus, circa quos corpus mobile exiſtit. Hanc ob rationem quando de ſtabilitate, qua corpus quodpiam in aqua ſitum aequilibrii tenet, eſt quaeſtio, id abſolute definiri nequit, ſed determinanda eſt certa inclinatio, in qua ſtabilitas ſeſe exerat; quem in finem iſtam ſtabilitatis determinatam definitionem praemiſi, in qua ſtabilitatem ad certum quendam axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem alligaui. Quamuis autem hoc pacto ſumme difficile videatur de ſtabilitate corporum aquae innatantium certi quid ſtatuere, cum infiniti axes deberent conſiderari, et reſpectu cuiusque ſtabilitas aſſignari, tamen iam notaui eiusmodi inſuperabili labore non eſſe opus, ſed ſufficere, ſi reſpectu duorum tantum axium inuicem normalium ſtabilitas definiatur. Motus enim

enim inclinatorius circa quemuis alium axem ſpectari poteſt tanquam compoſitus ex duobus motibus inclinatoriis circa illos axes inuicem normales, pro quorum vtroque ſi ſtabilitas fuerit cognita, inde ſtabilitas reſpectu alius cuiusque axis poterit colligi. Quemadmodum igitur pro quouis aequilibrii ſitu in corpore quocunque aquae innatante ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis horizontalis debeat inveſtigari, in ſequente propoſitione docebitur.

PROPOSITIO 28.

Problema.

290. *Corporis* ACFDB *aquae in aequilibrio inſidentis determinare ſtabilitatem reſpectu axis dati horizontalis* cd *per centrum grauitatis corporis* G *tranſeuntis, atque motum oſcillatorium cuius corpus circa hunc axem eſt capax.*

Tab. XV. fig. 3.

Solutio.

Sit ACBD ſectio aquae, et AFB pars corporis aquae immerſa, cuius centrum magnitudinis O ſitum erit in recta verticali EF per centrum grauitatis corporis G tranſeunte, eo quod corpus in aequilibrio eſt poſitum. Sit totius corporis maſſa ſeu pondus $= M$, eiusque partis ſubmerſae ſoliditas ſeu volumen $= V$, atque momentum inertiae totius corporis reſpectu axis $\bar{c}\,\bar{d} = S$. Concipiatur nunc corpus paulisper inclinari circa axem $\bar{c}\,\bar{d}$ centro grauitatis interea vel aſcendente vel deſcendente, quo aequalis pars aquae maneat immerſa. Fiat vero inclinatio per angulum infinite paruum $d\bar{w}$, poſito ſinu toto $= 1$; atque poſt hanc inclinationem ſit $aCbD$ ſectio aquae

priorem aquae ſectionem ſecans recta CD, parallela axi cd, eritque angulus, quem haec noua ſectio aquae cum priore conſtituit pariter $= dw$. Quia autem vtroque caſu aequale corporis volumen ſub aqua verſatur, erit ſegmentum $ACDa$ aequale ſegmento $BCDb$. Ponatur areae ACD centrum grauitatis in p, areae autem BCD centrum grauitatis in q, atque ex p et q in CD ducantur perpendiculares pr et qs, erit ſoliditas ſegmenti $ACDa$ $= ACD.\ pr.\ dw$, ſegmenti vero $BCDb$ ſoliditas erit $= BCD.\ qs.\ dw$; hinc igitur habebitur $ACD.\ pr = BCD.\ qs$. Praeterea ipſius ſegmenti $ACDa$ centrum magnitudinis cadat in P, ſegmenti vero $BCDb$ in Q, atque ex P et Q in CD ducantur normales PR et QS.

Iam per punctum O ducatur ad planum $aCbD$ perpendicularis eOg, quae in ſitu corporis inclinato erit verticalis, atque tum ex G in hanc rectam, tum ex e per E in CD ducantur normales Gg et eEH, erit $Gg = GO.dw$ et $Ee = EO.dw$. Quo igitur vim inueniamus qua corpus ex ſitu hoc inclinato in priſtinum ſitum aequilibrii reſtituitur, pars corporis aquae immerſa eſt conſideranda quae eſt $= ACFDB + ACDa - BCDb$, ex quibus ſingulis membris vires ſunt definiendae ad corpus reſtituendum, vel conuertendum circa axem cd. Preſſionis autem aquae, quam pars ACFDB ſuſtinet, momentum ad corpus reſtituendum eſt $= M.\ Gg = M.\ GO.\ dw$. Nunc fiat vt V ad $ACDa$ ita pondus M ad vim ex ſegmento $ACDa$ ortam, quae proinde erit $= \frac{M \cdot ACDa}{V} = \frac{M \cdot ACD.pr \cdot dw}{V}$, quae expreſſio pariter valebit pro preſſione aquae in ſegmentum $BCDb$. Cum autem ſegmenti $ACDa$ centrum

trum magnitudinis ſit in P, erit momentum inde oriundum ad corpus reſtituendum $= \frac{M.ACD \cdot pr \cdot dw}{V}(PR + He + Gg)$; momentum vero ortum ex vi ſegmenti BCD*b* tendet ad ſubuerſionem, eritque adeo negatiuum et $= \frac{-M \cdot ACD.pr.dw}{V}(QS - He - Gg)$. Horum trium momentorum duo priora ſunt addenda et a ſumma poſtremum ſubtrahendum, quo facto prodibit momentum totale ad reſtitutionem corporis in priſtinum aequilibrii ſitum tendens $= M\,dw(GO + \frac{ACD.pr}{V}(PR + QS))$; quod diuiſum per angulum inclinationis dw dabit ſtabilitatem huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $cd = M(GO + \frac{ACD \cdot pr(PR + QS)}{V})$. Diuidatur per hanc ſtabilitatis expreſſionem momentum materiae ſeu inertiae totius corporis reſpectu axis $\underline{cd}$, quod eſt S, et prodibit longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus corporis ſeſe circa axem $\underline{cd}$ in aequilibrium reſtituentis quae penduli longitudo proinde erit $= \frac{SV}{M(G.O + ACD \cdot pr(PR + QS))}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

291. Quia eſt ACD. pr = BCD. qs atque p et q ſunt centra grauitatis arearum ACD et BCD, ſequitur rectam CD tranſire per centrum grauitatis ſectionis aquae ACBD.

Coroll. 2.

292. Si ergo ſectionis aquae ACBD centrum grauitatis repertum fuerit in I, atque ſtabilitas huius aequilibrii ſitus requiratur reſpectu axis cd, tum in ſectione aquae ACBD per centrum grauitatis I ducatur recta parallela CD ipſi axi cd, qua inuenta ſtabilitas deſiderata per calculum innoteſcet.

 Coroll.

Coroll. 3.

293. Quemadmodum autem p et q ſunt centra grauitatis partium ACD et BCD ſectionis aquae, ita intelligere licet puncta P et Q eſſe centra oſcillationis earundem partium circa axem CD oſcillantium.

Coroll. 4.

294. Poſtquam igitur ſectio aquae recta per centrum grauitatis tranſeunte diuiſa eſt in duas partes, vtriusque partis tam centrum grauitatis quam centrum oſcillationis debet indagari, quo facto ſine vllo ad angulum inclinationis $d\underline{w}$ habito reſpectu ſtabilitas deſiderata poterit inueniri.

Coroll. 5.

295. Quoniam inter oſcillandum centrum grauitatis totius corporis G recta vel aſcendit vel deſcendit, vt perpetuo debita corporis pars maneat aquae ſubmerſa; perſpicuum eſt huiusmodi motum centri grauitatis fore minimum, ſi recta verticalis per centrum grauitatis totius corporis tranſiens ſimul per centrum grauitatis ſectionis aquae transeat.

Coroll. 6.

296. Intelligitur ceterum quo maior ſit expreſſio $M(GO + \frac{ACD \cdot pr(PR + QS)}{V})$, eo firmius corpus in ſuo aequilibrii ſitu eſſe permanſurum, ſi ſcilicet circa axem cd ad inclinandum ſollicitetur; ſin autem haec expreſſio fiat negatiua, tum corpus minime declinatum iri ſubuerſum.

Sholion

Scholion.

297. Determinata igitur eſt ſatis commode et concinne ſtabilitas, qua vnumquodque corpus aquae inſidens in aequilibrio perſiſtit, id quod primo intuitu ſummopere difficile videri potuiſſet. Praeterea etiam ea regula eſt perquam ſimplex et facilis, cuius ope ipſae oſcillationes, quas corpus ex ſitu aequilibrii depulſum ſeſe reſtituens abſoluit, quo ipſo dignitas et vtilitas huius theoriae abunde intelligitur; facile enim erit hinc inſignia commoda ad nauigationem deriuare, quod fieri non potuiſſet, ſi enodatio harum propoſitionum ad inextricabiles calculos deducta fuiſſet. Quae autem ad ſtabilitatem determinandam pro quoque corpore noſſe oportet, ſunt praeter pondus totius corporis a quo quantitas partis ſubmerſae pendet, interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae atque imprimis ſectio aquae quae ad hoc negotium calculo eſt ſubiicienda. Sectiones igitur aquae variarum figurarum conueniet conſiderari, atque eas expreſſiones, quas ad ſtabilitatem definiendam noſſe oportet, definiri quo poſt modum facilius ſit de quoque corpore aquae innatante iudicium ferre. Hunc infinem in ſequente propoſitione inuentam expreſſionem calculo analytico ſum perſecuturus.

PROPOSITIO 29.
Problema.

Tab. XVI. fig. 1.

298. *Si ſectio aquae fuerit curua quaecunque* ACBD, *cuius natura per aequationem eſt data, definire ſtabilitatem corporis aquae inſidentis reſpectu axis cuiusuis, per calculum analyticum.*

Solutio

Solutio.

Sit M. massa seu pondus corporis aquae insidentis, et V volumen partis submersae, atque Go exprimat interuallum inter centrum grauitatis corporis et centrum magnitudinis partis submersae, posito centro grauitatis G in loco humiliore; posito enim centro grauitatis G supra centrum magnitudinis O tum loco $+$GO scribi debet $-$GO. Iam per centrum grauitatis sectionis aquae ducta sit recta CD parallela illi axi, cuius respectu stabilitas quaeritur; et ad hanc rectam tanquam axem referantur orthogonaliter ordinatae YXZ, ponaturque $GX = x$; $XY = y$; et $XZ = z$. Sint porro p et q centra grauitatis arearum CAD et CBD, atque P et Q earundem centra oscillationis respectu axis CD; et ex his punctis ad axem CD ducantur normales pr, qs, PR et QS. His positis erit $pr = \frac{\int yydx}{2\int ydx}$; $qs = \frac{\int zzdx}{2\int zdx}$; atque $PR = \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx}$ et $QS = \frac{2\int z^3dx}{3\int z^2dx}$ integralibus his ita acceptis vt euanescant posito $x = 0$; atque tum loco x posito CD. Ita exprimet $\int ydx$ aream CAD, atque $\int zdx$ aream CBD. Quia vero est CAD. $pr =$ CBD. qr, erit $\int yydx = \int zzdx$. ob ACD. $pr = \frac{1}{2}\int yydx$ et CBD. $qr = \frac{1}{2}\int zzdx$. Denique autem habebitur $PR + QS = \frac{2\int y^3dx}{3\int y^2dx} + \frac{2\int z^3dx}{3\int z^2dx} = \frac{2\int(y^3+z^3)dx}{3\int y^2dx}$; quibus in formula supra inuenta substitutis reperietur stabilitas corporis in isto aequilibrii situ $= M\left(GO + \frac{\int(y^3+z^3)dx}{3V}\right)$.

Coroll. 1.

299. Ad stabilitatem igitur obtinendam ope calculi integralis sumendum est integrale formulae $\int(y^3+z^3)dx$, ita

ta vt euanescat positis $x = 0$, atque post integrationem peractam, poni debet $x = CD$.

Coroll. 2.

300. Si recta CD sectionem aquae in duas partes similes et aequales diuidat, erit vbique $z = y$ hoc ergo casu stabilitas erit $= M(GO + \frac{3\int y^3 dx}{3V})$.

Coroll. 3.

301. Si centrum grauitatis totius corporis G supra centrum magnitudinis O partis submersae cadat, tum interuallum GO negatiue accipi oportet, eritque his casibus stabilitas $= M(\frac{\int(y^3 + z^3)dx}{3V} - GO)$.

Coroll. 4.

302. Nisi ergo G supra O cadat, aequilibrii situs respectu omnium axium erit stabilis; quia $\int(y^3 + z^3)dx$ semper affirmatiuum tenet valorem. At existente puncto G magis eleuato quam O, tum fieri potest, vt situs aequilibrii sit instabilis, id quod accidit si fuerit $GO > \frac{\int(y^3 + z^3)dx}{3V}$.

Scholion.

303. Quo autem has formulas eo facilius ad varia corporum aquae innatantium genera accommodare liceat, figuras nonnullas determinatas loco sectionis aquae ACBD substituam, et quomodo se habeat stabilitas eiusmodi cor porum aquae insidentium inuestigabo. Non solum autem stabilitatem respectu vnici axis determinabo, sed respectu binorum inter se normalium, quo ex hac duplici stabili-

 tate

tate respectu cuiusuis alius axis stabilitas possit aestimari. In hunc finem eiusmodi elegi figuras, quae vel in nauigatione locum habeant, vel etiam ad experimenta instituenda sint maxime accomodatae, vt tam vsus quam vtilitas huius theoriae clarissime ob oculos ponatur. Huic igitur negotio absoluendo sequentes destinaui propositiones, quibus institutum huius capitis penitus exhaurietur.

PROPOSITIO 30.

Problema.

Tab. XVI. fig. 2.

304. *Si corporis aquae insidentis sectio aquae fuerit parallelogrammum rectangulum* EFHK, *inuenire eius stabilitatem tum respectu axis* CD, *tum axis ad hunc normalis* AB.

Solutio.

Consideretur primo axis CD parallelus lateribus EF et KH, sitque $EF = KH = A$; $EK = B$, et massa seu pondus corporis $= M$, volumenque partis submersae $= V$. Ponatur $CX = x$ erit $XY = XZ = y = z = \frac{1}{2}B$. Ergo $\int y^3 dx = \frac{B^3 x}{8}$ et $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{B^3 x}{4} = \frac{A \cdot B^3}{4}$ sumto integrali per totum axem CD. Erit igitur stabilitas respectu axis $CD = M(GO + \frac{A \cdot B^3}{12V})$. Simili autem modo stabilitas respectu alterius axis AB erit $= M(GO + \frac{A^3 \cdot B}{12V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

305. Si ergo tam $GO + \frac{A \cdot B^3}{12V}$ quam $GO + \frac{A^3 \cdot B}{12V}$ fuerint quantitates affirmatiuae, tum situs aequilibrii corporis erit stabilis respectu cuiusuis axis alius.

Coroll.

Coroll. 2.

306. Stabilitas igitur respectu axis CD eo erit maior, quo maius fuerit latus $EK = B$; atque semper stabilitas erit maxima respectu axis breuioris, quod quidem per se est planum.

Scholion.

307. Si pari modo per integrationem computetur stabilitas respectu diagonalis alterutrius EH vel FK tum reperietur $\int (y^3 + z^3)\,dx = \frac{A^3 \cdot B^3}{2(A^2 + B^2)}$. Atque ipsa stabilitas corporis respectu huius axis erit $= M\left(GO + \frac{A^3 \cdot B^3}{6V(A^2 + B^2)}\right)$. Quae expressio media est inter expressiones ante inuentas pro axibus CD et AB. Atque si fuerit $A = B$ tum stabilitas erit aequalis tam respectu axium AB et CD quam respectu diagonalium. Ex quo facilius intelligitur, ad statum corporum aquae innatantium cognoscendum sufficere stabilitatem respectu duorum axium inter se normalium determinasse. Eiusmodi autem bini axes sunt accipiendi, qui in sectione aquae sunt praecipui, et quorum alter maximam alter vero minimam habeat stabilitatem, quemadmodum in casu proposito fecimus.

Exemplum 1.

308. Si totum corpus fuerit parallelepipedum MPQNRTVS aquae ita insidens, vt EKHF sit sectio aquae; atque pondus eius se habeat ad aequalis voluminis aquei pondus vt p ad q. Deinde sit longitudo $MN = a$; latitudo $MP = b$; et altitudo $PT = c$; erit in sectione aquae $A = a$ et $B = b$. Habebitur autem ex statu aequilibrii $q : p = PT(c) : KT$, vnde est $KT = \frac{pc}{q}$; atque volumen

Tab. XVI. fig. 3.

 partis

partis submersae $= \frac{pabc}{q} = V$; cuius centrum magnitudinis O cadet in medio inter I et L rectae verticalis WL per medium parallelepipedi ductae, ita vt sit $LO = \frac{pc}{2q}$. Quoniam vero hic situs aequilibrio praeditus ponitur, necesse est; vt centrum grauitatis totius corporis cadat in eandem rectam verticalem LW; sit ergo in G, existente $LG = h$, erit $GO = \frac{pc}{2q} - h$. His igitur substitutis erit stabilitas respectu axis longitudinalis CD, qua inclinationi circa hunc axem resistitur $= M(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qb^2}{12pc})$ stabilitas vero respectu axis latitudinalis AB erit $= M(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qa^2}{12pc})$ in quibus expressionibus littera M denotat pondus parallelepipedi, atque p ad q rationem grauitatis specificae corporis ad aquam. Ex his igitur formulis stabilitas huius aequilibrii situs respectu cuiusuis axis colligi poterit.

Coroll. 1.

309. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis, oportet esse tam $h < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ quam $h < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{12pc}$. Si ergo sit $a > b$, dum modo fuerit $h < \frac{pc}{2q} + \frac{qb^2}{12pc}$ situs aequilibrii respectu omnium axium erit stabilis.

Coroll. 2.

310. Si parallelepipedum constet ex materia vniformi, tum eius centrum grauitatis G cadet in medio inter L et W, eritque $h = \frac{1}{2}$. Hoc ergo casu stabilitas erit $= M(\frac{qb^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q})$ respectu axis CD. Respectu vero alterius axis AB erit stabilitas $= M(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}$.

Coroll.

Coroll. 3.

311. Sit basis parallelepipedi quadratum seu $a = b$; erit stabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{12pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$. Quo ergo iste aequilibrii situs sit stabilis, necesse est vt sit $c < \frac{qa}{\sqrt{6p(q-p)}}$.

Exemplum 2.

Tab. XVI. fig. 4.

312. Sit corpus aquae innatans cuneiforme MRPQSN aquae in situ erecto insidens vt sectio aquae EKHF sit rectangulum basi MPQN parallelum. Pondus autem huius corporis se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Ponatur $MN = PQ = a$; $MP = NQ = b$; atque altitudo cunei WL sit $= c$; in qua recta verticali WL ambo centra tam grauitatis G quam magnitudinis O sint sita, atque $LG = h$. Iam manentibus $EF = KH = A$; $EK = FH = B$ erit $A : B = a : b$ atque $A : A = WL(c) : IL$; vnde fiet $IL = \frac{Ac}{a}$. At ex grauitare specifica sequitur $q : p = b^2 : B^2$, vnde prodit $B = b\sqrt{\frac{p}{q}}$; atque $A = a\sqrt{\frac{p}{q}}$ et $IL = c\sqrt{\frac{p}{q}}$. Ex his reperietur $LO = \frac{2}{3}LI = \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}$, atque $GO = \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - h$. Volumen denique partis submersae V erit $= \frac{ABc}{2}\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{abcp\sqrt{p}}{2q\sqrt{q}}$. Quibus valoribus substitutis emerget stabilitas respectu axis CD $= M\left(\frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - h + \frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$. Atque respectu alterius axis AB erit stabilitas $= M\left(\frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}} - h + \frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

313. Si cuneus iste ex materia vniformi est confectus, erit $h = \frac{2}{3}c$; atque hoc casu stabilitas respectu axis CD

CD erit $= M\left(\frac{bb}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$; respectu axis AB vero erit stabilitas $M\left(\frac{a^2}{6c}\sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

314. Si ergo fuerit $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{a^2+4cc}$, atque etiam $\sqrt{\frac{p}{q}} > \frac{4cc}{bb+4cc}$, tum situs iste aequilibrii erit stabilis; casibus vero contariis situs prodibit instabilis et ad subuersionem procliuis

Coroll. 3.

315. Si generaliter b retineat valorem eundem, vtraque expressio $\frac{a^2}{6c} + \frac{2}{3}c$ et $\frac{bb}{6c} + \frac{2}{3}c$ fit infinite magna tam si $c = 0$ quam si $c = \infty$ minimum igitur valorem induet, si fuerit $a = 2c$ vel etiam $b = 2c$. His igitur casibus stabilitas prodibit minima ceteris paribus.

Exemplum 3.

Tab. XVI. fig. 5.

316. Sit corpus aquae insidens pyramis recta MNLPQ cuius basis MNPQ sit horizontalis et parallelogrammum rectangulum, cui ergo sectio aquae EFHK erit parallela pariterque parallelogrammum rectangulum. Sit MN $=$ PQ $= a$; MP $=$ NQ $= b$, et altitudo WL $= c$; et centrum grauitatis extet in G, vt sit LG $= h$. Pondus autem huius pyramidis sit M, quod, se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Iam erit $a : b = A : B$, atque $a^3 : A^3 = q : p$; ita vt sit $A = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $B = b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, similiterque $LI = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Centrum magnitudinis autem partis submersae cadet in O vt sit $LO = \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, vnde erit $GO = \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - h$. At volumen partis submersae erit

=

$= \frac{ABc}{3}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{pabc}{3q}$. His ſubſtitutis erit ſtabilitas reſpectu axis CD $= M(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$. At reſpectu axis AB ſtabilitas erit $= M(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}})$.

Coroll. 1.

317. Manentibus igitur tam b quam ratione $p:q$ iisdem, ſtabilitas reſpectu axis CD erit minima, ſi fuerit $b = c\sqrt{3}$. Reſpectu axis AB vero ſtabilitas erit minima, ſi fuerit $a = c\sqrt{3}$.

Coroll. 2.

318. Quo igitur huiusmodi pyramis firmiſſime ſitu erecto aquae innatet, in ea conficienda imprimis eſt euitandum ne ſit vel a vel b prope aequale ipſi $c\sqrt{3}$.

Coroll. 3.

319. Si iſta pyramis ex materia vniformi conſtet tum erit $b = \frac{3}{4}c$. Stabilitas ergo talis pyramidis reſpectu axis CD erit $= M(\frac{b^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$, at reſpectu axis AB erit ſtabilitas $= M(\frac{a^2}{4c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} + \frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{3}{4}c)$.

Coroll. 4.

320. Quo igitur eiusmodi pyramis aquae firmiter inſideat neceſſe eſt vt ſit tam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{bb+3cc}$ quam $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{3cc}{a^2+3cc}$. Si ergo fuerit $a < b$, oportet vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{27c^6}{(a^2+3c^2)^3}$.

Coroll. 5.

321. Si fuerit $a = b = c$; talis pyramis ſitum in figura repreſentatum conſeruare non poterit niſi ſit $\frac{p}{q} >$

27/64

$\frac{27}{64}$; hoc eſt, niſi pyramidis grauitas ſpecifica ſit maior quam $421\frac{7}{8}$, poſita aquae grauitate ſpecifica $= 1000$.

PROPOSITIO 31.

Problema.

Tab. XVII. fig. 1.

322. *Si corporis natantis ſectio aquae fuerit rhombus* ACBD, *determinare eius ſtabilitatem reſpectu vtriusque diagonalis* CD *et* AB.

Solutio.

Conſideretur primo axis per centrum grauitatis corporis tranſiens parallelus diagonali CD; ducaturque ordinata quaecunque YXZ; atque vocatis $CI = DI = A$; $AI = BI = B$; $CX = x$; $XY = XZ = y$, erit $A : B = x : y$ et $y = \frac{Bx}{A} = z$; atque latus rhombi AC erit $= \sqrt{(A^2 + B^2)}$. His poſitis erit $\int y^3\, dx = \frac{B^3 x^4}{4A^3}$; poſitoque $x = A$ habebitur valor huius expreſſionis pro parte CIA $= \frac{1}{4} A.B^3$ qui quater ſumtus reſpondebit toti rhombo CBDA, pro quo proinde erit $\int (y^3 + z^3)\, dx = A.B^3$. Si nunc corporis pondus ponatur $= M$; et interuallum centri magnitudinis ſuper centro grauitatis $= GO$ atque volumen partis ſubmerſae $= V$, erit ſtabilitas reſpectu axis CD $= M(GO + \frac{A.B^3}{3V})$. Simili autem modo reperietur ſtabilitas reſpectu axis AB $= M(GO + \frac{A^3.B}{3V})$. Ex quibus duabus expreſſionibus ſtabilitas reſpectu cuiusuis alius axis poterit colligi. Q. E. I.

Coroll. 1.

323. Si igitur diagonales ſunt inaequales, corpus inclinationi circa longiorem minus reſiſtit, quam circa breviorem

viorem ; quae regula fere in omnibus ſectionibus aquae locum habet, vbi axes inter ſe normales ſunt inaequales.

Coroll. 2.

324. Quo ergo iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt tam $GO + \frac{A.B^3}{3V}$ quam $GO + \frac{A^3.B}{3V}$ habeat valorem affirmatiuum, id quod accidit, ſi tantum minor expreſſio fuerit affirmatiua.

Coroll. 3.

325. Si latus rhombi AC ponatur $= C$, atque angulorum ſinus $= m$; anguli ACB coſinus vero $= n$; erit anguli CAB coſinus $= -n$. Hinc reperitur $B = C\sqrt{\frac{1-n}{2}}$; et $A = \frac{mC}{\sqrt{2(1-n)}}$. Quare ſtabilitas reſpectu axis CD erit $= M(GO + \frac{m(1-n)C^4}{12V})$ reſpectu axis AB autem $= M(GO + \frac{m(1+n)C^4}{12V})$.

Coroll. 4.

326. Si rhombus abit in quadratum, fiet $m = 1$ et $n = 0$; hocque caſu ſtabilitas reſpectu vtriusque diagonalis erit eadem ſcilicet $= M(GO + \frac{C^4}{12V}$; quae ipſa expreſſio quoque inuenta eſt ex praecedente propoſitione, facta applicatione parallelogrammi ad quadratum.

Exemplum.

327. Terminetur pars corporis aquae ſubmerſa in recta horizontali RS parallela diagonali CD, atque rectis BL, AL ad punctum medium L rectae RS ductis, Tab. XVII. fig. 2.

S item-

itemque verticalibus CR et DS, ita vt singulae sectiones horizontales sint rhombi. Maneant $CI = DI = A$; $AI = BI = B$; sitque $CR = LI = DS = D$; erit partis submersae volumen $V = ABD$; eiusque centrum magnitudinis in O vt sit $LO = \frac{2}{3}D$. Totius vero corporis centrum grauitatis cadat in G, dicaturque $LG = b$; erit $GO = \frac{2}{3}D - b$. Ex his igitur reperietur stabilitas huius aequilibrii situs respectu axis $CD = M\left(\frac{2}{3}D - b + \frac{B^2}{3D}\right)$. At respectu axis AB erit stabilitas $= M\left(\frac{2}{3}D - b + \frac{A^2}{3D}\right)$.

Coroll. 1.

328. Quo igitur iste aequilibrii situs sit stabilis necesse est vt sit $b < \frac{A^2 + 2D^2}{3D}$, simulque etiam $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$. Si ergo fuerit $B < A$ sufficiet ad stabilitatem corpori comparandam esse $b < \frac{B^2 + 2D^2}{3D}$.

Coroll. 2.

329. Nisi ergo sit $B > D$, necessario centrum grauitatis corporis infra superficiem aquae cadere debet, si quidem situs aequilibrii debeat esse stabilis.

PROPOSITIO 32.

Problema.

Tab. XVII. fig. 3.

330. *Si sectio aquae fuerit triangulum isosceles* ECF, *determinare stabilitatem corporis aquae insidentis tum respectu axis* CD *tum respectu axis* AB *ad illum normalis et per centrum grauitatis* I *sectionis aquae transeuntis.*

So-

Solutio.

Positis pondere corporis $=M$; volumine partis submersae $=V$; et distantia inter centra grauitatis corporis et magnitudinis partis submersae $=GO$; sit $CD=A$, et $DE=DF=B$; erit $CX\,(x):XY\,(y)=A:B$, vnde fit $y=\frac{Bx}{A}$. Quamobrem habebitur $\int y^3\,dx=\frac{B^3x^4}{4A^3}=\frac{A.B^3}{4}$, posito $x=CD=A$. Pro tota ergo sectione aquae erit $\int(y^3+z^3)\,dx=\frac{A.B^3}{2}$, vnde fiet stabilitas respectu axis $CD=M\left(GO+\frac{A.B^3}{6V}\right)$. Consideretur nunc axis AB, in quo est $AI=BI=\frac{2}{3}B$; et $CI=\frac{2}{3}A$; eritque $\int y^3dx$, ortum ex area $ACB=\frac{AI.CI^3}{4}=\frac{4A^3.B}{81}$; ergo eadem formula ex toto triangulo ACB orta erit $=\frac{8A^3.B}{81}$. Nunc ex altera parte consideretur area tota $IDFH$, quae est rectangulum, existente $IH=DF=B$, et $DI=FH=\frac{1}{3}A$; prodibitque ex ea $\int y^3\,dx=DI^3.IH=\frac{A^3.B}{27}$. A quo valore subtrahi debet is qui oritur ex triangulo BFH qui est $=\frac{BH.FH^3}{4}=\frac{A^3.B}{4.81}$, et relinquetur valor ipsius $\int y^3\,dx$ pro trapezio $IDBF=\frac{11A^3B}{4.81}$. Trapezio ergo $ABFE$ respondebit valor ipsius $\int y^3\,dx=\frac{11A^3.B}{2.81}$. Quocirca respectu axis AB erit totalis valor ipsius $\int(y^3+z^3)\,dx=\frac{8A^3.B}{81}+\frac{11A^3.B}{2.81}=\frac{A^3.B}{6}$. Ex quo erit stabilitas huius aequilibrii situs respectu axis $AB=M\left(GO+\frac{A^3.B}{18V}\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

331. Stabilitas igitur respectu axis CD maior erit, quam stabilitas respectu axis AB si fuerit $A.B^3>\frac{A^3.B}{3}$, hoc

 est

eſt ſi fuerit $\frac{B}{A} > \frac{1}{\sqrt{3}}$. Contra vero ſi fuerit $\frac{B}{A} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ tum ſtabilitas reſpectu axis AB maior erit quam reſpectu axis CD.

Coroll. 2.

332. Quia $\frac{B}{A}$ eſt tangens anguli DCE ſeu tangens dimidii anguli CCF, manifeſtum eſt ſi fuerit angulus E CF maior quam 60°, tum ſtabilitatem reſpectu axis CD excedere ſtabilitatem reſpectu axis AB; contrarium vero euenire, ſi angulus ECF minor ſit quam 60°.

Coroll. 3.

333. Si ergo triangulum ECF fit aequilaterum, tum ſtabilitas reſpectu vtriusque axis erit eadem. Sed ob $A = B\sqrt{3}$ erit ſtabilitas hoc caſu $= M(GO + \frac{B^4}{2V\cdot\sqrt{3}})$ quae pro omnibus reliquis axibus valebit.

Coroll. 4.

334. Si trianguli aequilateri area ponatur $= E$ erit $B^2\sqrt{3} = E$; vnde ſtabilitas ſitus erit aequilibrii $= M(GO + \frac{E^2}{6V\sqrt{3}})$.

Coroll. 5.

335. At ſi ſectio aquae eſt quadratum cuius area ſit pariter $= E$, tum ex ſupra inuentis ſtabilitas erit $= M(GO + \frac{E^2}{12\cdot V})$. Quare cum ſit $\frac{1}{6\sqrt{3}} > \frac{1}{12}$, ſequitur ſectionem aquae quae eſt triangulum aequilaterum ſtabiliorem ſitum producere quam quadratum eiusdem areae ceteris paribus.

Exemplum 1.

Tab. XVII. fig. 4. 336. Sit corpus aquae innatans prisma triangulare MNPTRS, cuius ſectiones horizontales ſint triangula aequilatera MNP, CEF, TRS, quorum latera ſint $= a$; area

area vero $= bb$; ſeu $bb = \frac{aa\sqrt{3}}{4}$. Ponatur pondus huius prismatis $= M$; eiusque grauitas ſpecifica ad aquam vt p ad q. atque tota altitudo $MT = WL = c$. Cum nunc CEF ſit ſectio aquae, erit $CT = \frac{pc}{q}$; atque $LO = \frac{pc}{2q}$; volumen vero partis ſubmerſae $V = \frac{pb^2c}{q}$. Totius porro prismatis centrum grauitatis ſit in G, exiſtente $LG = h$; erit $GO = \frac{pc}{2q} - h$. Ex his igitur fiet ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu cuiusque axis $= M(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}})$ $= M(\frac{pc}{2q} - h + \frac{qa^2}{24pc})$.

Coroll. 1.

337. Si priſma ex materia vniformi fuerit confectum, erit $h = \frac{1}{2}c$, atque ſtabilitas huius aequilibrii ſitus erit $= M(\frac{qb^2}{6pc\sqrt{3}} - \frac{(q-p)c}{2q}) = M(\frac{qa^2}{24pc} - \frac{(q-p)c}{2q})$.

Coroll. 2.

338. Quo ergo iſte ſitus aequilibrii ſit ſtabilis oportet vt ſit $c < \frac{qb}{\sqrt{3p(q-p)\sqrt{3}}}$ ſiue quod eodem redit $c < \frac{qa}{2\sqrt{3p(q-p)}}$. Hinc igitur innoteſcit, quam longa pars a prismate trianguları indefinitae longitudinis debeat abſcindi, vt ſitu erecto aquae innatare queat.

Coroll. 3.

339. Si ex eadem materia prisma quadrangulare conficiatur, cuius baſes ſint quadrata $= bb$, longitudo eorum c minor eſſe debet quam $\frac{qb}{\sqrt{6p(q-p)}}$ quo ſitu erecto aquae innatare poſſint. Longiora igitur in hunc finem licebit accipere prismata triangularia, quam quadrata.

Exemplum 2.

Tab. XVII. fig. 5.

340. Sit corpus aquae innatans pyramis triangularis MNPL, cuius bafis MNP horizontaliter extra aquam emineat. Ponatur bafis MNP quae fit triangulum aequilaterum, latus qodlibet $=a$; bafisque eiusdem $=bb$ ita vt fit $b^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pyramidis porro altitudo WL fit $=c$, eiusque pondus M fe habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q; fitque CFE fectio aquae quae pariter erit triangulum aequilaterum, cuius area fit $=$ E. Iam erit $q:p=b^3:E\sqrt{E}$ feu $\sqrt{E}=b\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. et $E=b^2\sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$. Similique modo erit $LI=c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $LO=\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Volumen autem partis fubmerfae V erit $=\frac{pb^2c}{3q}$. Sit denique $LG=h$; erit ftabilitas huius aequilibrii fitus, quem pyramis propofita tenet $=M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}-h+\frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$ $=M\left(\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}-h+\frac{a^2}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 1.

341. Si pyramis ex materia vniformi conftet, erit $h=\frac{3}{4}c$. Hoc igitur cafu habebitur ftabilitas iftius aequilibrii fitus $=M\left(\frac{bb}{2c\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}-\frac{3}{4}c+\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$ $=$ $M\left(\frac{aa}{8c}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}-\frac{3}{4}c+\frac{3}{4}c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll. 2.

342. Si pyramis infuper abeat in tetraedron feu pyramidem regularem, erit $c=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ftabilitas igitur tetraedri

traedri angulo deorsum verso aquae insidentis erit $=$
$$Ma\left(\frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right) = \frac{Ma\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}\left(5\sqrt[3]{\frac{p}{q}} - 4\right).$$

Coroll. 3.

343. Quo ergo huiusmodi tetraedron in aqua talem situm aequilibrii seruare queat, necesse est vt sit $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} > \frac{4}{5}$ seu $\frac{p}{q} > \frac{64}{125}$. Eius igitur grauitas specifica maior esse debet quam 512, posita aquae grauitate specifica $= 1000$.

Scholion.

344. Euolui hactenus eiusmodi sectiones aquae quae sunt figurae rectilineae, atque tres casus tractati sufficere possunt ad nostrum institutum. Progrediar itaque ad figuras curuilineas, ex iisque praecipuas, quae facillime experimentis comprobari queant, faciam sectiones aquae, vt de plurimis corporibus inde iudicari queat, quemnam situm aquae imposita sint habitura, et quanta stabilitate in quoque aequilibrii situ persistant.

PROPOSITIO 33.

Problema.

345. *Si corporis aquae in aequilibrio insidentis sectio aquae fuerit circulus* ACBD, *determinare stabilitatem respectu cuiuscunque axis* CD, *quia vbique stabilitas est eadem, qua iste aequilibrii status gaudebit.* Tab. XVIII. fig. 1.

Solutio.

Ponatur radius circuli CI $= a$; et ducta in quadrante CIA quacunque applicata XY vocetur IX $= x$ et

XY

XY $= y$ erit $y = \sqrt{(a^2-x^2)}$; vnde fiet $\int y^3 dx = \int dx (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$. At per reductionem formularum integralium ad simpliciores fit $\int dx (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{(a^2-x^2)}}{8} + \frac{3a^4}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Ponatur $x = a$; dabit $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{1}{2}\pi$ posita $\pi : 1$ ratione peripheriae ad diametrum. Quo facto pro quadrante CIA habebitur $\int y^3 dx = \frac{3\pi a^4}{16}$; adeoque pro toto circulo erit $\int(y^3+z^3)dx = \frac{3\pi a^4}{4}$. Si nunc corporis pondus sit $=$ M, et volumen partis aquae submersae $=$ V, atque GO denotet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit stabilitas respectu cuiusuis axis $= M(GO + \frac{\pi a^4}{4V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

346. Quia diameter se habet ad peripheriam vt 1 ad π, exprimet πa^2 aream circuli. Si ergo area circuli ponatur $= bb$, erit $a^2 = \frac{bb}{\pi}$ atque stabilitas ita exprimetur vt sit $= M(GO + \frac{b^4}{4\pi V})$.

Coroll. 2.

347. Si sectio aquae est quadratum areae $= b^2$, tum stabilitas inuenta est $= M(GO + \frac{b^4}{12V})$, et si sectio aquae est triangulum aequilaterum, cuius area itidem est $= bb$, tum stabilitas erat $= M(GO + \frac{b^4}{6V\sqrt{3}})$. Vnde intelligitur stabilitatem circuli esse minimam, trianguli vero maximam.

Coroll. 3.

348. Colligere ergo hinc licet, si sectio aquae fuerit polygonum regulare, stabilitatem prodituram esse eo minorem

norem, quo plura latera polygonum contineat; ceteris scilicet paribus.

Coroll. 4.

349. Ad maximam igitur corpori aquae innatanti stabilitatem respectu omnium axium conciliandam, conueniet corpori eiusmodi dare figuram, vt sectio aquae fiat triangulum aequilaterum.

Exemplum 1.

350. Sit corpus aquae innatans cylindrus rectus MNRS, in aqua erectus, cuius sectiones horizontales sint circuli MN, CD, et RS, aequales, quorum radius sit $= a$. Pondus autem huius cylindri sit M, quod se habeat ad pondus aequalis voluminis aquae vt p ad q. Quare posita totius cylindri altitudine WL $= c$ erit altitudo partis aquae submersae IL $= \frac{pc}{q}$, atque volumen partis submersae $V = \frac{\pi p a^2 c}{q}$; cuius centrum magnitudinis cadet in O vt sit LO $= \frac{pc}{2q}$. Sit autem centrum grauitatis totius corporis in G, existente LG $= b$. His igitur substitutis inuenietur stabilitas cylindri in isto erecto aequilibrii situ $= M\left(\frac{pc}{2q} - b + \frac{qa^2}{4pc}\right)$.

Tab. XVIII. fig. 2.

Coroll. 1.

351. Cylindrus igitur in tali situ firmiter perseuerabit si fuerit $b < \frac{pc}{2q} + \frac{qa^2}{4pc}$. Hoc est si fiat LI : $\frac{1}{2}$CI $= \frac{1}{2}$CI : OH, tumque punctum G infra punctum H cadat.

Coroll. 2.

352. Si cylindrus ex materia vniformi conſtet, erit $b = \frac{c}{2}$; hoc igitur caſu erit ſtabilitas $= M\left(\frac{qa^2}{4pc} - \frac{(q-p)c}{2q}\right)$. Quo igitur hic ſitus ſit ſtabilis, neceſſe eſt vt ſit $c < \frac{qa}{\sqrt{2p(q-p)}}$.

Coroll. 3.

353. Si totus cylindrus fuerit datus, ex grauitate ſpecifica cognoſcetur an ſitu erecto natare queat. Natabit enim ſi fuerit $\frac{p}{q}$ vel maius quam $\frac{c+\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$ vel minus quam $\frac{c-\sqrt{(cc-2aa)}}{2c}$.

Coroll. 4.

354. Perſpicitur ergo ſi fuerit $c < a\sqrt{2}$. tum cylindrum ſemper ſitu erecto eſſe nataturum, quaecunque fuerit ratio grauitatum ſpecificarum.

Exemplum 2.

Tab. XVIII. fig. 3.

355. Sit corpus conus rectus MLN vertice deorſum verſo aquae innatans, cuius baſis radius $WM = WN = a$; et altitudo $WL = c$. Sit eius grauitas ſpecifica ad aquam vt p ad q: erit ſectionis aquae CO radius $IC = a\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$; et $IL = c\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Atque cum baſis MN area ſit $= \pi a^2$, erit area ſectionis aquae $= \pi a^2 \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$; vnde volumen partis ſubmerſae V erit $= \frac{\pi p a^2 c}{3q}$; atque $LO = \frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}}$. Poſito nunc $LG = b$, erit ſtabilitas huius ſitus aequilibrii $= M\left(\frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3\pi \cdot CI^4}{4pa^2c}\right) = M\left(\frac{3}{4} c \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - b + \frac{3a^2}{4c} \sqrt[3]{\frac{p}{q}}\right)$.

Coroll.

Coroll. 1.

356. Si ergo conus ex materia homogenea conſtet, erit $b = \frac{3}{4}c$; hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= \frac{3}{4} M \left(\frac{(a^2+c^2)}{c} \sqrt[3]{\frac{p}{q}} - c \right)$.

Coroll. 2.

357. Quo ergo iſte ſitus aequilibrii ſit ſtabilis neceſſe eſt vt ſit $\frac{p}{q} > \frac{c^6}{(a^2+c^2)^3}$. Quod niſi fuerit, conus alium quaereret ſitum, quo aquae innatet.

PROPOSITIO 34.

Problema.

358. *Sit corporis pars aquae ſubmerſa* CMLMD *ſolidum rotundum, genitum conuerſione figurae* LMC *circa axem verticalem* LI, *atque ſectio aquae ſit circulus* CD *ſeu ſuprema ſolidi rotundi ſectio horizontalis. Determinare huius corporis aquae inſidentis ſtabilitatem.* Tab. XVIII. fig. 4.

Solutio.

Sit ſectionis aquae ſemidiameter $IC = a$; atque longitudo axis $IL = c$; in quo poſitum ſit tum centrum grauitatis totius corporis G, tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae O. Poſitis nunc pondere corporis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$, erit ſtabilitas $= M\left(GO + \frac{\pi a^4}{4V}\right)$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $= 1$. At tam volumen V quam punctum O ex natura curua CML determinari oportet: Ad quod praeſtandum vocetur abſciſſa $LP = x$, reſpondensque applicata $PM = y$, et habebitur volumen ſolidi ex conuerſione

 partis

partis MLP orti $= \pi \int y^2 dx$, in quo intergali ſi ponatur $x = c$, quo caſu fiet $y = a$, prodibit totum partis ſubmerſae volumen V. Integrali ergo extenſo per totam figuram L M C erit $V = \pi \int y^2 dx$. Simili vero modo reperietur poſitio centri magnitudinis O partis ſubmerſae erit ſcilicet $LO = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}$, vtroque integrali vsque ad ſectionem aquae extenſo. Si ergo ponatur $LG = b$, quippe quod interuallum non a natura curuae CML, ſed ab indole totius corporis pendet, erit ſtabilitas iſtius ſitus aequilibrii $= M\left(\frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx} - b + \frac{a^4}{4\int y^2 dx}\right) = M\left(\frac{a^4 + 4\int y^2 x dx}{4\int y^2 dx} - b\right)$. Q. E. I.

Coroll. 1.

359. Ad ſtabilitatem ergo huiusmodi corporum inveniendam, duplex integratio eſt inſtituenda; integrari enim debent hae duae formulae differentiales $y^2 dx$ et $y^2 x dx$.

Coroll. 2.

360. Quoties igitur hae duae formulae algebraicam admittunt integrationem, toties ſtabilitas algebraice exprimi poterit. Ad quadraturas curuarum autem erit confugiendum, ſi vel alterutra vel vtraque integrari nequeat.

Scholion.

361. Ex aequatione autem, quae habebitur inter x et y, qua curuae LMC natura exprimitur colligetur, vtrum formulae $y^2 dx$ et $y^2 x dx$ ſint algebraice integrabiles, an a quadraturis pendeant. Hic autem conueniet omnes aequationes algebraicas inter x et y indicari, quae vtramque formu-

formulam reddant algebraice integrabilem, quo generatim intelligatur, quaenam curuae algebraicae pro curua generatrice LMC assumtae producant stabilitatem algebraice expressam. Ad hoc igitur inuestigandum assumo duas quascunque quantitates algebraicas P et Q, quarum vel altera alterius sit functio algebraica, vel ambae functiones algebraicae tertiae cuiusdam variabilis puta z; et facio $\int yydx = P$, et $\int yyxdx = Q$. Ex his igitur erit $y^2 = \frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{xdx}$; vnde reperitur $x = \frac{dQ}{dP}$; atque $y^2 = \frac{dP^3}{dPddQ - dQddP}$, qui sunt generales valores algebraici pro x et y, qui primo praebebunt aequationem inter x et y algebraicam, et deinde stabilitatem producent algebraice expressam, quippe quae erit $= M(\frac{a^4 + 4Q}{4P} - b)$. Sed stabilitatem in solutione problematis generaliter inuentam expediet exemplis nonnullis illustrare.

Exemplum I.

362. Sit corporis pars aquae immersa CLD portio sphaerae, cuius radius sit b; erit $b - c = \sqrt{(bb - aa)}$, hincque $b = \frac{aa + cc}{2c}$. Cum igitur LMC sit arcus circuli radii b, erit $y^2 = 2bx - xx$, ideoque $\int y^2 dx = bxx - \frac{1}{3}x^3$. Facto ergo $x = c$; erit $\int yydx = bcc - \frac{1}{3}c^3 = \frac{c(3aa + cc)}{6}$. Deinde habebitur $\int yyxdx = \frac{2bx^3}{3} - \frac{1}{4}x^4 = \frac{2bc^3}{3} - \frac{1}{4}c^4$ posito $x = c$, substituto autem loco b valore per a et c definito erit $\int yyxdx = \frac{cc(4aa + cc)}{12}$. His igitur integralibus inuentis prodibit stabilitas quaesita $= M(\frac{3a^4 + 4aacc + c^4}{2c(3aa + cc)} - b) = M(\frac{aa + cc}{2c} - b) = M(b - b)$.

 Coroll.

Coroll. 1.

363. Cum ſtabilitas ſit inuenta $= M(b - \underline{b})$, erit ea proportionalis interuallo, quo centrum grauitatis G infra centrum ſphaerae cadit. Eiusmodi igitur corpus firmiter ſuum ſitum tenebit, ſi centrum grauitatis infra ſphaerae, cuius pars ſubmerſa eſt portio, centrum cadat.

Coroll. 2.

364. Sin autem centrum grauitatis G in ipſum ſphaerae centrum cadat, tum ſitus aequilibrii erit indifferens, id quod accidit in globis ex materia vniformi confectis; qui aquae inſidentes omnes ſitus habebunt aequilibrii proprietate gaudentes, nullum autem neque ſtabilem, neque inſtabilem ſed omnes indifferentes.

Exemplum 2.

365. Sit curua LMC parabola cuiuscunque ordinis, ſcilicet $y^m = b^{m-n} x^n$. Erit ergo $a^m = b^{m-n} c^n$, atque $b = \frac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$. Cum autem ſit $y^2 = b^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n}{m}}$; erit $\int y^2 dx = \frac{m b^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m} = \frac{m b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}}{2n+m}$ poſito $\underline{c}$ loco x, quo integrale ad ſectionem aquae CD vsque pertingat. Simili autem modo erit $\int yyx\,dx = \frac{m b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{2m+2n}$. Ex quibus integralibus obtinebitur ſtabilitas quaeſita $= M \left(\frac{a^4 + \frac{2m}{m+n} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+2m}{m}}}{\frac{4m}{2n+m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n+m}{m}}} - \underline{b} \right)$ Subſtituto autem loco

$\underline{b}$ va-

$\underline{b}$ valore assignato $\dfrac{a^{\frac{m}{m-n}}}{c^{\frac{n}{m-n}}}$ ex quo sit $b^{\frac{2m-2n}{m}} = a^2 c^{\frac{-2n}{m}}$,

prodibit stabilitas $= M\left(\dfrac{a^2 + \frac{2m}{m+n} c^2}{\frac{4m}{m+2n} c} - b\right)$.

Coroll. 1.

366. Stabilitas igitur haec, si in formula eliminetur $\underline{a}$ eiusque loco introducatur $\underline{b}$ hoc modo exprimi potest, vt sit $= M\left(\frac{2n+m}{2n+2m} c + \frac{2n+m}{4m} b^{\frac{2m-2n}{m}} c^{\frac{2n-m}{m}} - b\right)$. Ex qua formula datis $\underline{b}$ et $\underline{c}$, radius sectionis aquae sponte determinatur.

Coroll. 2.

367. Manifestum autem est ex istis expressionibus stabilitatem eo fore maiorem, quo minor fuerit fractio $\frac{m}{n}$. Si enim $\underline{m}$ esset $= 0$, tum stabilitas prodiret infinite magna, nec hic autem casus nec alii finitimi in rerum natura locum inueniunt.

Coroll. 3.

368. Si maneat altitudo $\underline{b}$ eiusdem quantitatis, stabilitas fiet infinita siue sit $c = 0$ siue $c = \infty$, minima ergo erit stabilitas si fuerit $aa = \frac{2m}{m+n} cc$ siue $c = a\sqrt{\frac{m+n}{2m}}$. In casu ergo parabolae conicae, quo $m = 2$, $n = 1$ stabilitas erit minima si sit $c = a\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Pro-

Propositio 35.
Problema.

Tab. XVIII. fig. 5.

369. *Si corporis aquae insidentis in aequilibrio sectio aquae fuerit ellipsis* ACBD, *determinare stabilitatem huius aequilibrii situs respectu vtriusque axis maioris* CD *et minoris* AB.

Solutio.

Ponatur semiaxis maior $CI = a$; semiaxis minor $IA = b$; erit posita abscissa $IX = x$, et applicata $XY = y$, inter x et y haec aequatio $y = \frac{b}{a} \surd (a^2 - x^2)$. Hinc igitur fiet $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3} \int dx (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, quod integrale posito $x = a$, et denotante π peripheriam circuli cuius diameter est $= 1$, abibit in $\frac{3\pi ab^3}{16}$ quod proinde quater sumtum dabit pro tota sectione aquae $\int (y^3 + z^3) dx = \frac{3\pi ab^3}{4}$. Si nunc pondus corporis sit $= M$, volumen partis submersae $= V$, atque GO indicet interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, erit stabilitas corporis respectu axis $CD = M (GO + \frac{\pi ab^3}{4V})$. Commutatis autem inter se semiaxibus a et b prodibit stabilitas respectu axis minoris $AB = M (GO + \frac{\pi a^3 b}{4V})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

370. Stabilitas igitur, qua corpus inclinationi circa axem maiorem resistit, minor est quam stabilitas respectu axis minoris. Quare si situs fuerit stabilis respectu axis maioris, eo stabilior erit respectu axis minoris.

Co-

Coroll. 2.

371. Tota ellipsis area est $= \pi ab$; si ergo ponatur area ellipsis $= E$, erit stabilitas respectu axis maioris CD $= M(GO + \frac{Eb^2}{4V})$, stabilitas vero respectu axis minoris AB erit $= M(GO + \frac{Ea^2}{4V})$.

Scholion.

372. Superfluum fore arbitror hanc propositionem exemplis illustrare, cum superiora exempla pro circulo data huc facillime possint accomodari, atque insuper parum commodi tam ad experimenta instituenda, quam ad pleniorem intelligentiam sequentium deriuari queat. Quamobrem missis his, quibus sectio aquae praecipue spectatur, ad varias figuras ipsius partis submersae considerandas progrediar, vbi per calculum sum inquisiturus tum in ipsum partis submersae volumen, tum etiam in eius centrum magnitudinis, quippe quae res praeter sectionem aquae imprimis ad stabilitatem cognoscendam inseruiunt. Eiusmodi autem conformationes partis submersae prae aliis sum contemplaturus, quae quandam habeant similitudinem cum nauibus reliquisque vasis, quae ad motum super aqua adhiberi solent, quo inde non contemnenda commoda ad nauigationem solide tractandam consequantur. Figuram igitur partis submersae infra terminatam ponam linea recta horizontali, quae in nauibus spina dici consueuit, et ad quam omnes sectiones transuersales verticaliter factae finiuntur. His autem sectionibus transuersalibus, quae sunt verticales et ad spinam normales figura partis aquae submersae determinatur. Quamobrem quomodo tum ex se-

 ctione

ctione aquae, tum ex huius modi sectionibus transuersalibus stabilitatem definiri oporteat, docebo.

PROPOSITIO 36.

Problema.

Tab. XIX. fig. 1.

373. *Si sectio aquae fuerit curua quaecunque* AM BMA *diametro* AB *praedita, pars vero submersa terminetur tum infra spina horizontali* EF *sub axe* AB *posita, tum ad latera parabolis conicis* MQ *vertices in* M *et axes horizontales ad* AB *normales habentibus; inuenire stabilitatem corporis talem aequilibrii situm in aqua tenentis, respectu axis* AB.

Solutio.

Consideretur sectio partis submersae quaecunque M QM verticalis et ad diametrum AB normalis voceturque abscissa AP $= x$; MP $=$ MP $= y$; et profunditas constans PQ $=$ AE $= c$. Iam seorsim contemplemur sectionem M QM, in qua curua MQ et MQ sunt parabolae Appollonianae vertices in M et axem MM communem habentes. Cum nunc sit PM $= y$ et PQ $= c$, erit parameter vtriusque parabolae $= \frac{c^2}{y}$. Quare si dicatur MX $= t$ et XY $= u$, erit $u^2 = \frac{c^2 t}{y}$; et area MXY $= \frac{2}{3} t u = \frac{2ct}{3} \sqrt{\frac{t}{y}}$, vnde area tota MQM posito $t = y$ fiet $= \frac{4}{3} c y$. Centrum grauitatis autem o areae MQM reperietur sumendo integrale $\int \frac{1}{2} uudt$ idque diuidendo per $\int udt$; est vero $\int \frac{1}{2} uudt = \frac{cctt}{4y}$, quod diuisum per $\int udt = \frac{2ct}{3} \sqrt{\frac{t}{y}}$, dat $\frac{3c}{8} \sqrt{\frac{t}{y}}$ ita vt posito $t = y$ futurum sit P$o = \frac{3}{8} c$. Cum igitur omnium sectionum eiusmodi MQM centrum grauitatis in eandem a diametro AB distantiam cadat, totius partis submersae cen-

fig. 2. fig. 1.

centrum magnitudinis ſitum erit in O vt ſit $IO = \frac{3}{8}c$. Multiplicetur porro ſectionis MQM area $\frac{4}{3}cy$ per dx, atque integrale $\frac{4}{3}c\int y\,dx = \frac{2}{3}c$. MAM dabit ſoliditatem AEQMM, quamobrem ſi area totius ſectionis aquae AMBM ponatur $= E$; erit ſoliditas partis ſubmerſae $= \frac{2}{3}Ec$. Ponatur nunc pondus totius corporis $= M$, ſitque eius centrum grauitatis G in recta verticali IH per centrum magnitudinis O ducta, erit ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M(IG - \frac{3}{8}c + \frac{\int y^3 dx}{Ec}$. Eſt enim propoſitione 29. huc traducta $z = y$, atque $V = \frac{2}{3}Ec$. Poſito ergo $IG = b$, erit ſtabilitas quaeſita $= M(b - \frac{3}{8}c + \frac{\int y^3 dx}{Ec})$. Q. E. I.

Coroll. 1.

374. Hinc etiam diſtantia rectae verticalis IH a puncto A inuenietur ſumendo integrale ipſius $\frac{4}{3}cyx\,dx$, idque diuidendo per $\int\frac{4}{3}cy\,dx$, ita vt futurum ſit $AI = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$.

Coroll. 2.

375. Ex hac igitur formula perſpicuum eſt rectam HI per ipſum centrum grauitatis ſectionis aquae I eſſe tranſituram, ita vt hoc caſu tria centra grauitatis ſcilicet totius corporis, partis ſubmerſae, et ſectionis aquae in eadem recta verticali ſint ſita.

Coroll. 3.

376. Data ergo pro huiusmodi corporibus ſectione aquae, ex qua tam eius area E quam $\int y^3 dx$ innoteſcat, ſtabilitas ſitus aequilibrii facile definiri poterit.

Coroll. 4.

377. Quia ergo in tali corpore centrum grauitatis ſectionis aquae I verticaliter imminet centro grauitatis G totius corporis G, inter oſcillandum centrum grauitatis neque aſcendet neque deſcendet, et hancobrem motus oſcillatorius erit maxime tranquillus.

Scholion.

378. Satis igitur idonea eſt haec forma parabolica, quae ſectionibus nauium transuerſalibus tribuatur, cum per eas id commodi acquiratur, vt et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem incidat, et centrum grauitatis ſectionis aquae. Hinc enim euenit, vti ſupra vidimus, vt dum oſcillationes a naue peraguntur, modo ſint minimae, centrum grauitatis in quiete permaneat, quod plurimum iuuat ad iſtum motum maxime tranquillum efficiendum. Non ſolum autem figura parabolica ad hunc effectum producendum eſt accommodata, ſed praeterea omnes parabolae cuiusque ordinis idem praeſtant, innumerabilesque aliae curuae, quae ita ſunt comparatae vt areae earum MQM proportionales ſint ipſis ordinatis MPM ſectionis aquae; ſiquidem ſpina corporis aquae innatantis eſt horizontalis. At ſi tota ſpina non eſt linea recta, ſed vel tota curua, vel tantum ad proram puppimque ſurſum erecta, tum peculiaribus opus eſt curuis ad idem commodum obtinendum. Quamobrem primo parabolas ſuperiorum graduum pro caſu, quo tota ſpina eſt recta horizontalis, euoluam, ac deinde curuas idoneas ad ſpinas non rectas inueſtigabo.

PRO-

PROPOSITIO 37.

Problema.

379. *Si sectio aquae fuerit curua quaecunque* AMBM *praedita diametro* AB *sub qua in plano verticali existat spina recta horizontalis* EF, *ad quam terminetur pars corporis aquae immersa parabolis cuiusuis ordinis* MQ, *vertices in* M *habentibus*, *axesque horizontales* MM : *determinare stabilitatem respectu axis* AB.

Tab. XIX. fig. 1.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $AE = PQ = c$; consideretur sectio transuersalis MQM seorsim, in qua sumta abscissa MX sit $= t$ et applicata $XY = u$, natura vero huius parabolae exprimatur hac aequatione $u = \frac{t^n}{p^{n-1}}$, existente p parametro. Quia autem facto $t = MP = y$, fit $u = PQ = c$ erit $c = \frac{y^n}{p^{n-1}}$ atque $p^{n-1} = \frac{y^n}{c}$. Area autem MXY erit $= \frac{t^{n+1}}{(n+1)p^{n-1}} = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)y^n}$ vnde totius sectionis MQM prodibit area $= \frac{2cy}{(n+1)}$. Deinde huius sectionis centrum grauitatis situm erit in o vt sit $Po = \frac{\int uudt}{2\int udt}$ posito post integrationem $t = y$. At est $\int u^2 dt = \frac{\int t^{2n} dt}{p^{2n-2}}$ $= \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)p^{2n-2}} = \frac{c^2 t^{2n+1}}{(2n+1)y^{2n}} = \frac{c^2 y}{2n+1}$ posito $t = y$. Quare cum sit $2\int udt = \frac{2cy}{n+1}$; erit $Po = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Cum igitur

fig. 2.

tur omnium ſectionum trausuerſalium centra grauitatis in eandem rectam horizontalem cadant, partis ſubmerſae centrum magnitudinis ſitum erit in O, vt ſit $IO = \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$. Capacitas autem partis ſubmerſae erit $= \int \frac{cy\,dx}{n+1} = \frac{c}{n+1}$ in aream AMBMA; ſi ergo ſuperficies ſectionis aquae dicatur $= E$, erit volumen partis ſubmerſae $= \frac{cE}{n+1}$. Sit denique totius corporis centrum grauitatis ſitum in G, vt ſit $IG = b$; atque pondus totius corporis $= M$, erit $GO = b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)}$, atque in propoſitione generali (298) fiet $\int (y^3 + z^3)\,dx = 2\int y^3\,dx$, ob $z = y$, et $V = \frac{cE}{n+1}$. Hinc igitur orietur ſtabilitas huius aequilibrii ſitus reſpectu axis $AB = M\left(b - \frac{(n+1)c}{2(2n+1)} + \frac{2(n+1)\int y^3\,dx}{3Ec}\right)$. Q. E. I.

fig. 1.

Coroll. 1.

380. Cum quaeuis ſectio transuerſalis MQM proportionalis ſit ordinatae ſectionis aquae MM, perſpicuum eſt centrum grauitatis ſectionis aquae I et centrum magnitudinis partis ſubmerſae O in eandem rectam verticalem IH incidere.

Coroll. 2.

381. Dato igitur in eiusmodi corpore centro grauitatis I ſectionis aquae, ſimul locus centri magnitudinis O innoteſcit; atque in rectam verticalem IOH etiam centrum grauitatis totius corporis G poſitum ſit neceſſe eſt.

Coroll. 3.

382. Si fiat $n = 1$, ſectiones transuerſales fient triangula, ac lineae MQ rectae. Hoc igitur caſu erit volumen

lumen partis ſubmerſae $V = \frac{cE}{2}$ atque ſtabilitas prodibit $=$ $M(b - \frac{c}{3} + \frac{4\int y^3 dx}{3Ec})$.

Coroll. 4.

383. Sin autem ſit $n < 1$, attamen $n > 0$, curuarum MQ tangentes in M erunt verticales, atque pars ſubmerſa figuram habebit gibbam ſeu conuexam. At ſi $n > 1$ figura fiet concaua.

Coroll. 5.

384. Si ſtabilitas reſpectu cuiuscunque alius axis horizontalis per I tranſeuntis deſideretur in formula, nil erit mutandum, niſi expreſſio $2\int y^3 dx$, quae ad illum axem accommodari debebit. Cetera enim omnia non pendent a poſitione axis aſſumti AB.

Scholion.

385. Eadem proprietas, quam habent tum conicae parabolae tum omnes reliquae cuiusque ordinis, competit in innumerabiles alias curuas, quae id circo eodem ſucceſſu ſectionibus transuerſalibus MQ tribui poterunt. Omnes enim curuae eodem modo ſatisfaciunt, quae ita ſunt comparatae, vt earum areae MQM quae aequalibus abſciſſis reſpondent, ipſis ordinatis MM ſint proportionales, quippe ex quo fit, vt partis ſubmerſae centrum magnitudinis O verticaliter infra centrum grauitatis I ſectionis aquae cadat. Pro his igitur curuis aequatio inter u et t ita debet eſſe comparata, vt primo fiat $u = 0$, facto $t = 0$, atque vt deinde fiat $u = c$ poſito $t = y$. Tertio vero

vero area $\int u\,dt$, si ponatur $t=y$, talem formam induere debebit $\frac{mcy}{n}$. Haec autem requisita sequenti modo impetrabuntur: In genere sit T functio quaecunque nullius dimensionis ipsarum $t=y$, seu functio quaecunque ipsius $\frac{t}{y}$ quae euanescat facto $t=0$. Haec ergo functio T posito $t=y$ abibit in numerum constantem, qui sit n, quo facto exhibebit ista aequatio $u=\frac{cT}{n}$ curuam quaesito satisfacientem. Namque facto $t=0$, erit $u=0$, atque posito $t=y$ fit $u=c$. Denique erit $\int u\,dt=\int\frac{cT\,dt}{n}=\frac{cy}{n}\int\frac{T\,dt}{y}$. At $\int\frac{T\,dt}{y}$ dabit functionem ipsius $\frac{t}{y}$, quae ideo abibit in numerum constantem puta m facto $t=y$; vnde area sectionis transuersalis MQM orietur $=\frac{2mcy}{n}$. Praeterea vero etiam interuallum Po, quo centrum grauitatis o sectionis transuersalis cuiusuis sub horizontem cadit erit constans: Cum enim sit $Po=\frac{\int uu\,dt}{2\int u\,dt}$ posito post integrationem $t=y$; erit $\int uu\,dt=\frac{cc}{nn}\int T^2 dt=\frac{c^2y}{nn}\int\frac{T\,dt}{y}$. Sed $\int\frac{T^2dt}{y}$, dabit functionem ipsius $\frac{t}{y}$, quae facto $t=y$ abibit in numerum constantem, qui sit K, ita vt sit $\int uu\,dt=\frac{Kc^2y}{nn}$, quae expressio diuisa per $2\int u\,dt=\frac{2mcy}{n}$ dabit $Po=\frac{Kc}{2mn}$, cui expressioni consequenter aequale quoque est interuallum IO.

PROPOSITIO 38.
Problema.

Tab XIX. fig. 3.

386. *Sit sectio aquae curua quaecunque* AMBMA *praedita diametro* AB, *sub qua in plano verticali pars submersa terminetur ad spinam* EHF *vtcunque curuilineam, in-*

inuenire figuram idoneam pro ſectionibus transuerſalibus, vt centrum magnitudinis partis ſubmerſae O *verticaliter infra centrum grauitatis ſectionis aquae* I *cadat.*

Solutio.

Poſitis $AP = x$; $PM = PM = y$, et $PQ = z$; dabitur ob ſectionem aquae datam y per x; et ob figuram ſpinae EHF pariter datam etiam z per x. Quaeſito autem commodiſſime ſatisfiet, ſi ſingulis ſectionibus transverſalibus MQM eiusmodi figura tribuatur, vt earum areae fiant proportionales ordinatis MM ſeu ipſis y. Ad hoc efficiendum ducta in ſectione transuerſali applicata quacunque XY, ſit $MX = t$ et $XY = y$, atque aſſumamatur ad naturam curuae MQ exprimendam indefinita iſta aequatio $u = \frac{At^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{Bt^{m-1}}{y^{m-1}} + \frac{Ct^{k-1}}{y^{k-1}}$, in qua n, m, et k ſint numeri vnitate maiores, quo facto $t = 0$ fiat $u = 0$. Nunc quia facto $t = y$, fieri debet $u = z$, erit $z = A + B + C$. Porro quaeratur area $\int u\,dt$, quae erit $= \frac{At^n}{ny^{n-1}} + \frac{Bt^m}{my^{m-1}} + \frac{Ct^k}{ky^{k-1}}$; quae cum poſito $t = y$, fieri debeat ipſi y proportionalis, ponatur $= cy$, habebiturque $c = \frac{A}{n} + \frac{B}{m} + \frac{C}{k}$. Ex his conditionibus conſequitur $B = \frac{kmnc - mnz - m(k-n)A}{n(k-m)}$; atque $C = \frac{knz - kmnc + k(m-n)A}{n(k-m)}$; quamobrem pro curua quaeſita ſequens habebitur aequatio: $u = \frac{At^{n-1}}{y^{n-1}} + \frac{(kmnc - mnz - m(k-n)A)t^{m-1}}{n(k-m)y^{m-1}} - \frac{(kmnc - knz - k(m-n)A)t^{k-1}}{n(k-m)y^{k-1}}$: in qua praeter exponentes k, m, n quantitatem A pro arbitrio

bitrio aſſumere licet. In quantitate autem A eligenda, ad hoc praecipue attendi oportebit, vt applicata u continuo creſcat, ab M ad Q progrediendo, atque vt inter puncta M et Q curua ſit vbique conuexa, ſeu vt $\frac{du}{dt}$ continuo decreſcat, prius autem aſſequemur ſi $\frac{du}{dt}$ ab M vsque ad Q affirmatiuum valorem retineat; atque adeo in Q ſit affirmatiuum. In Q vero erit $\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}$ $((n-1)A + \frac{(m-1)}{n(k-m)}(kmnc - mnz - m(k-n)A) - \frac{(k-1)}{n(k-m)}(kmnc - knz - k(m-n)A) = \frac{1}{y}(\frac{(m-n)(k-n)}{n}A - kmc + (k+m-1)z)$. Quare eſſe debebit $A > \frac{kmnc}{(m-n)(k-n)}$ quo $\frac{du}{dt}$ maneat affirmatiuum, etiamſi z fiat minimum. At ſi aliae circumſtantiae non admittant, vt ſingulis ſectionibus tranſuerſalibus eiusmodi figura inducatur, tum quanto ex vna parte puncti I ſectiones transuerſales iuſto vel maiores vel minores fuerint, tanto quoque vel maiores vel minores ex altera parte fieri debebunt, vt nihilominus centrum magnitudinis partis ſubmerſae in rectam IH incidat. Q. E. I.

Coroll. 1.

387. Si numerorum n, m, et k ponatur n minimus, m medius et k maximus, ex numero n cognoſcetur poſitio tangentis ſectionum transuerſalium in M. Nam ſi $n-1$ fuerit > 1 tum tangens erit horizontalis, ſin $n-1 < 1$ verticalis, at ſi $n = 2$ tum angulus erit obliquus.

Coroll. 2.

388. Si ergo ponatur $n = \frac{3}{2}$; tangens in M non ſolum fiet verticalis, ſed etiam radius oſculi in M erit finitus. Quare ſi porro ponatur $m = \frac{5}{2}$ et $k = \frac{7}{2}$ habebitur

pro

pro curua haec aequatio $u = \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{y}} + \frac{(105c - 70z - 40A)}{12}\frac{t\sqrt{t}}{y\sqrt{y}} - \frac{(105c - 42z - 28A)t^2\sqrt{t}}{12y^2\sqrt{y}}$.

Coroll. 3.

389. Quia esse debet $A > \frac{Kmnc}{(m-n)(k-n)} - \frac{n(k+n-1)z}{(m-n)(k-n)}$. Videamus an salua hac conditione tertius terminus C possit euanescere; hinc autem fit $A = \frac{mnc - nz}{m-n}$. Debebit ergo esse $(m+n-1)z > mnc$.

Coroll. 4.

390. Quando ergo spina ita est comparata vt z ad o usque decrescat, tum non poterit esse vbique $(m+n-1)z > mnc$. et hancobrem his casibus trinomia functione ipsius t ad u designandum vti oportebit.

Scholion.

391. Perspicuum autem est eiusmodi occurrere posse casus, quibus z tam diuersorum capax sit valorum, vt area sectionum transuersalium ipsi y soli omnino non proportionalis reddi queat; siquidem figurae non admodum dissimiles desiderentur earum, quae in nauibus adhiberi solent Nam vel vbi altitudo z maior existit, ibi transversalis nimium coarctata esse deberet, vel vbi z vehementer sit diminuta, ibi area sectionis tanta esse deberet, vt limitibus praescriptis contineri non posset. Eiusmodi igitur casibus eam medelam affere conueniret, cuius in solutione mentionem feci, vt sectiones transuersales, quae per regulam nimis deformes prodirent, vel augeantur vel

 minu-

minuantur ex vtraque parte aequaliter, quo locus centri grauitatis communis conferuetur. At ne tali fcientiae minus conueniente correctione fit opus, praeftabit tum figuram fectionis aquae, tum fpinae ad formam fectionum transuerfalium idoneam accomodare. Quem in finem pono fectionum transuerfalium areas tenere rationem compofitam amplitudinum in fectione aquae et profunditatum, feu effe vbique vt yz; namque hoc pofito quae figura vno cafu erit apta ad praxin, eadem locum habebit in omnibus reliquis. Eiusmodi autem curuae hac proprietate praeditae pro fectionibus transuerfalibus innumerabiles exhiberi poffunt, quae omnes fequenti aequatione generali continentur, fit T functio quaecunque ipfius $\frac{t}{y}$ euanefcens pofito $t=0$; quae facto $t=y$ abeat in numerum conftantem n. tum fiat $u=\frac{ZT}{n}$. Ex hac enim aequatione fit $u=0$, fi $t=0$ et $u=z$ fi $t=y$; ac denique erit fud$t=\frac{\int zTdy}{n}$ $=\frac{Zy}{n}\int\frac{Tdy}{y}$; at $\int\frac{Tdy}{y}$ facto $t=y$ abit in numerum conftatem m ita vt area tota fiat $=\frac{2m^2yz}{n}$.

PROPOSITIO 39.
Problema.

Tab. XIX. fig. 3.

392. *Si areae fectionum trausuerfalium* MQM *fuerint in ratione compofita bafium* MM *et profunditatum* PQ; *inuenire tum pro fectione aquae* AMBM *tum pro fpina* EHF *figuras idoneas, ut centra grauitatis fectionis aquae* I *et voluminis partis fubmerfae* O *in eandem rectam verticalem* IH *incidant.*

So-

Solutio.

Sit longitudo diametri ſectionis aquae $AB = a$; et quoniam partes ſectionis aquae vtrinque circa AB ſimiles et aequales eſſe debent, atque curuam AMBM vbique concauam verſus AB eſſe conuenit, ſumatur pro ea iſta aequatio $y = (A + Bx) \sqrt{(ax - xx)}$. At vero pro ſpina accipiatur haec aequatio $z = \frac{(\alpha + \beta x)(ax - xx)}{A + Bx}$, quo ea tam in A quam in B ſectioni aquae occurat, idque ſub obliquis angulis, prout in nauibus fieri ſolet. Hic ſcilicet poſitum eſt vt ante $AP = x$; $PM = y$ et $PQ = z$. Quo nunc puncta I et O in eandem rectam verticalem incidant, debet poſt integrationem peractam facto $x = a$ fieri $\frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{\int yzxdx}{\int yzdx}$: ad haec integralia autem capienda ſaltem pro caſu $x = a$ inſeruiet hoc theorema vi cuius eſt $\int (1 + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \text{etc.})\, dx (ax - xx)^n = (1 + \frac{(n+1)Ka}{(2n+2)} + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+2)(2n+3)} La^2 + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} Ma^3 + \text{etc.}) \int dx (ax - xx)^n$. Hinc igitur erit $\frac{\int yxdx}{\int ydx} =$

$$\frac{\int (Ax + Bx^2)\, dx \sqrt{(ax - xx)}}{\int (A + Bx) dx \sqrt{(ax - xx)}} = \frac{\frac{1}{2} A a + \frac{5}{16} B a^2}{A + \frac{1}{2} B a} = AI. \text{ At}$$

cum ſit $yz = (\alpha + \beta x)(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$; erit $\frac{\int yzxdx}{\int yzdx} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \alpha a + \frac{7}{24} \beta a^2}{\alpha + \frac{1}{2} \beta a}.$$ Qui valores inter ſe aequati dant

$$\frac{A + \frac{5}{8} B a}{A + \frac{1}{2} B a} = \frac{\alpha + \frac{7}{12} \beta a}{\alpha + \frac{1}{2} \beta a},$$ vnde fit $B\beta a = 4 A \beta - 6 B \alpha$;

ſeu $\beta = \frac{6 B \alpha}{4A - Ba}$. Quamobrem ſi pro ſectione aquae aſſumatur haec aequatio $y = (m + \frac{nx}{a}) \sqrt{(ax - xx)}$, tum pro

ſpina aſſumenda erit aequatio haec:
$z = \frac{k((4m-n)a+6nx)(ax-xx)}{(4m-n)a(ma+nx)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

393. Cum ſit $AI = \frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2}{A + \frac{1}{2}Ba}$ ob $A = m$ et $B = \frac{n}{a}$ erit $AI = \frac{a(\frac{1}{2}m + \frac{5}{16}n)}{m + \frac{1}{2}n}$. Quamobrem habebitur $AI = \frac{1}{2}a + \frac{na}{16m+8n}$. Quoties igitur n eſt numerus affirmatiuus ſeu m et n numeri eiusdem ſigni, erit $AI > \frac{1}{2}AB$.

Coroll. 2.

394. Si $n = 0$, fiet aequatio pro ſectione aquae $y = m\sqrt{(ax-xx)}$, quo ergo caſu ſectio aquae erit ellipſis, cui figura ſpinae, reſpondet $z = \frac{K}{ma}(ax-xx)$, quae ideo erit parabola. Hoc autem caſu punctum I in medium rectae AB incidit.

Coroll. 3.

395. Si ponatur $m = 0$, quo ſectio aquae hac aequatione exprimatur $y = \frac{nx}{a}\sqrt{(ax-xx)}$ erit figura ſpinae $z = \frac{K(a-6x)(a-x)}{na}$, quae autem figura eſt inepta, ob $z = 0$, ſi eſt $x = \frac{1}{6}a$.

Coroll. 4.

396. Ne igitur alicubi inter A et B fiat $z = 0$ neceſſe eſt vt ſit $a + \frac{6nx}{4m-n} > 0$, ſi quidem x inter limites o et a continetur. Fit autem $a + \frac{6nx}{4m-n} = 0$ ſi eſt

$x =$

$x = \frac{a(n-4m)}{6n}$; quare $\frac{n-4m}{6n}$ vel minus esse debet quam 0, vel maius quam 1.

Coroll. 5.

397. Fiat $n = 4m$, qui casus id habet singulare, quod cum sit pro sectione aquae $y = (m + \frac{4mx}{a}) \sqrt{(ax - xx)}$, fiat pro spina $z = \frac{Kxx(a-x)}{a(a+4x)}$ cuius igitur tangens in A erit horizontalis. At interuallum AI prodit $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{12}a = \frac{7}{12}a$.

Scholion 1.

398. Propositio haec latissime patet, atque omnes fere figuras, quae vulgo in constructione nauium adhiberi solent, in se complectitur. Est enim ad infinitas figuras sectionum transuersalium accomodata, prout ex §. 391 videre licet, atque insuper innumerabiles in se continet figuras sectionum aquae ab vsu non abhorentes; ita vt ex ea tam de constructione nauium iudicari, quam nouae nauium formae idoneae inueniri queant, quae quidem hactenus expositis principiis sint consentaneae. Latiore quidem sensu, si opus fuisset, solutionem adornare potuissemus, si pro sectione aquae eiusmodi aequationem $y = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}) \sqrt{(ax - xx)}$, pro spina vero hanc aequationem $z = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})(ax - xx)}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ect.}}$ assumsissemus; tum enim in figura spinae plures litterae indeterminatae relictae fuissent, quarum determinatione multo plures figurae produci potuissent. Prodiisset autem haec aequatio figuram spinae ad datam sectionem aquae accommodans

$$\frac{\frac{1}{2}Aa + \frac{5}{16}Ba^2 + \frac{7}{32}Ca^3 + \frac{21}{128}Da^4 + \text{etc.}}{A + \frac{1}{2}Ba + \frac{5}{16}Ca^2 + \frac{7}{32}Da^3 + \text{etc.}} = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{\frac{1}{3}\alpha a + \frac{7}{24}\beta a^2 + \frac{3}{16}\gamma a^3 + \frac{33}{256}\delta a^4 + \text{etc.}}{\alpha + \frac{1}{2}\beta a + \frac{7}{24}\gamma a^2 + \frac{3}{16}\delta a^3 + \text{etc.}} = \text{A I}.$$

Ex qua innumeris modis relatio coefficientium A, B, C, D etc. atque α, β, γ, δ etc. definiri poteſt.

Scholion 2.

399. Satis iam fuſe in iſto capite omnia, quae ad ſtabilitatem corporum aquae in quopiam aequilibrii ſitu inſidentium, cognoſcendam et diiudicandam pertinent, explanaſſe mihi videor, neque quicquam deeſſe videtur, quod in hac doctrina amplius deſiderari poſſit. Quamobrem huic capiti finem imponam eo progreſſurus quo ea, quae hic tractata ſunt, magnam afferent vtilitatem. In ſequente enim capite in effectum propius inquiram, quem vires quaecunque nauem ſeu corpus aquae innatans quodcunque ſollicitantes producant quo intelligatur, quid tam vis venti et remorum, quam gubernaculum et alliſio aquae ipſius in naue efficiant. Cum autem motus progreſſiuus ipſe ſine calculo reſiſtentiae cognoſci nequeat, quem in quinto denique capite plenius exponere conſtitui, hic tantum ſollicitationem ad iſtum motum et accelerationem momentaneam conſideraſſe contentus ero. In hoc vero praecipue incumbam, vt quantum quaeuis potentiae nauem ex ſitu aequilibrii deturbent, accurate definiam, atque in hunc finem ad tres ſupra memoratos axes, quos in quaque naui concipere licet, imprimis reſpiciam: circa quos omnis inclinatio et declinatio fieri cenſenda eſt.

CAPVT

Caput Quartum
DE
EFFECTV VIRIVM CORPORA AQAE INSIDENTIA SOLLICITANTIVM.

PROPOSITIO 40.
Theorema.

400.

Si in naui seu vase quocunque AB, *cuius pondus sit* $=M$, *onus* P *cuius pondus sit* $=m$, *per spatium* Pp *transferatur in* p; *totius vasis centrum grauitatis* G *transferetur secundum directionem* Gg *ipsi* Pp *parallelam in* g: *vt sit* $Gg = \frac{m.Pp}{M}$.

Tab. XX. fig. 1.

Demonstratio.

Sit Z centrum grauitatis nauis seu vasis demto onere P, erunt puncta Z, G et P in linea recta posita, ita vt sit $ZG:PG = m:M-m$ seu $ZG:ZP = m:M$. Translato iam onere m ex P in p, totum corpus quod ex duabus partibus $M-m$ et m compositum considero, partis alterius $M-m$ centrum grauitatis vt ante habebit in Z, alterius vero partis m centrum grauitatis nunc erit in p. Quamobrem totius corporis M centrum grauitatis nunc reperietur in rectae Zp puncto g, ita vt sit $Zg:pg = m:M-m$ seu $Zg:Zp = m:M$; vnde perspicitur rectam Gg parallelam fore rectae Pp, et triangula ZGg et ZPp inter se similia. Propterea erit $Gg:Pp = ZG:ZP = m:M$, ex quo prodit $Gg = \frac{m.Pp}{M}$. Q. E. D.

Co-

Coroll. 1.

401. Quoniam onerum traslatione nauis ſeu vaſis cuiusque aquae inſidentis pondus non mutatur ante et poſt translationem oneris, aequale volumen aquae immergetur.

Coroll. 2.

402. Corpus igitur in aqua eundem retinebit ſitum onere quodam transpoſito, ſi centrum grauitatis verticaliter vel ſurſum vel deorſum transfertur; id quod euenit, ſi onus verticaliter vel ſurſum vel deorſum transportatur.

Coroll. 3.

403. Ex capite autem praecedente conſtat, centro grauitatis corporis ſurſum translato ſtabilitatem ſitus aequilibrii diminui; eandem vero augeri centro grauitatis deorſum translato.

Coroll. 4.

404. Si igitur onus m verticaliter vel ſurſum vel deorſum transfertur per ſpatium s, centrum grauitatis vel aſcendet vel deſcendet per ſpatium $\frac{ms}{M}$: atque idcirco ſtabilitas vel diminuetur vel augebitur quantitate ms.

Coroll. 5.

405. Sin autem onus quodpiam vel horizontaliter vel oblique promoueatur, tum ſitus aequilibrii non conſeruabitur, ſed corpus ex eo inclinabitur; quia iſto oneris motu centrum grauitatis corporis de recta verticali per centrum magnitudinis partis ſubmerſae ducta depellitur.

Cor.

Coroll. 6.

406. Hinc etiam facile mutatio ſitus centri grauitatis colligetur, ſi plura onera vtcunque transponantur in alia loca. Ad hoc enim tantum opus eſt cuiusque oneris motum ſeorſim conſiderare.

Scholion.

407. In hoc capite ante omnia viſum eſt indagare, quantum ſitus aequilibri corporis aequae innatantis immutetur, dum centrum grauitatis ſolum de ſuo loco movetur; priusquam enim in effectus virium externarum inquiratur, conuenit eas mutationes euoluiſſe, quae in ipſis nauibus nullis accedentibus viribus alienis oriri poſſunt; etiamſi eiusmodi mutationes ſine viribus alienis euenire nequeant. Hancobrem primum centrum grauitatis de ſuo loco moueri conſiderabo, toto corporis pondere manente invariato, atque qualis mutatio in ſitu aequilibrii eueniat ſcrutabor; deinde vero non ſolum ſitum centri grauitatis mutatum ſpectabo, ſed etiam ipſum pondus corporis augeri vel diminui ponam, quod fit vel nouis oneribus imponendis, vel ab iis quae aderant auferendis. His enim caſibus non ſolum nauis inclinabitur, ſed etiam aquae vel magis immergetur, vel ex aqua emerget. Quamobrem facta eiusmodi mutatione non ſolum definiendum eſt, quemnam ſitum corpus ſit adepturum, ſed etiam quanta poſt mutationem futura ſit ſtabilitas. Omnes autem has mutationes tantum minimas contemplabor, cum calculi ſubleuandi cauſa, tum quod nihilominus inde iudicium de maioribus mutationibus formari poteſt; quia maiores mutationes ex minimis ſucceſſiue conflatae aeſtimari poſſunt.

PROPOSITIO 41.
Problema.

408. *Si nauis vel cuiusuis vasis aquae insidentis per oneris cuiuspiam translationem centrum grauitatis aliquantillum de suo loco promoueatur, inuenire declinationem vasis de pristino aequilibrii situ, atque stabilitatem, quam tum habebit.*

Solutio.

Cum centrum grauitatis recta vel ascendit vel descendit, situs aequilibrii nullam patitur mutationem, nisi quod eius stabilitas vel minuatur, vel augeatur. At si centrum grauitatis oblique promoueatur, tum iste motus resolui poterit in verticalem et horizontalem, quorum ille situm non afficit, hic autem omnino ad vas de priore situ declinandum impenditur. Quamobrem cum promotio verticalis nil habeat difficultatis, porro corporis AFB aquae ita insidentis vt AB sit sectio aquae et O centrum magnitudinis partis submersae, centrum grauitatis G transferri horizontaliter per Gg in g; quo facto vas circa axem ad planum OGg normalem inclinabitur, vt sectio aquae fiat ab cum priore angulum ACa constituens, qui est angulus inclinationis, quem quaerimus; cuius sinus sit $= w$ posito sinu toto $= 1$. Existente ergo ab sectione aquae et g centro grauitatis, aequilibrium aderit, ex cuius conditione w, indeque angulus inclinationis definietur. Loco totius corporis autem tantum considerabo figuram planam verticalem AFB, quum ex iis, quae pro figura plana reperientur, conclusio pro ipsis corporibus facile formari possit; si affini-

Tab. XX. fig. 2.

affinitas inter formulas ſtabilitatem exhibentes pro figuris planis et ſolidis attentius inſpiciatur. Erit igitur triangulum $ACa = BCb$, et cum vtrumque ſit minimum punctum C ſitum erit in medio rectae AB. Cum iam pars ſubmerſa ſit $aFB = AFB - ACa + BCb$, momenta virium aquae his partibus reſpondentia reſpectu centri grauitatis g, ſe mutuo deſtruere debent. Per O ad ſectionem aquae ab ducatur normalis TOV, in quam pariter ex g horizontalis gV normaliter cadet. His praemiſſis partis AFB momentum reſpectu g erit $= AFB.gV$; quoniam O eſt centrum magnitudinis partis AFB. Deinde trianguli ACa area eſt $= \frac{AC \cdot aC \cdot w}{2} = \frac{w \cdot AC^2}{2}$; eiusque centrum grauitatis erit in P vt ſit $Cp = \frac{2}{3}AC$ momentum igitur hinc ortum eſt $\frac{w \cdot AC^2}{2}(\frac{2}{3}AC + CT + gV)$; pari autem ratione momentum ex area BCb ortum eſt negatiuum atque $= \frac{w \cdot AC^2}{2}(\frac{2}{3}AC - CT - gV)$ poſito AC pro BC. Momentum igitur totale ex area aFb ortum erit $AFB.gV - \frac{2w \cdot AC^3}{3}$, quod cum aequilibrium adeſſe debeat, erit $= 0$. Transferantur iam haec ad corpora, atque in ſectione aquae corporis per eius centrum grauitatis ducta ſit recta ad planum OGg normalis, quae erit axis circa quem corpus inclinabitur; atque ad hunc axem in ſectione aquae colligantur vtrinque ſummae cuborum applicatarum orthogonalium, ſeu $\int(y^3 + z^3)dx$ ex prop. 29. quae quantitas, quam vocabo Q, ſubſtitui debet loco $2AC^3$. At loco area AFB ſcribendum erit volumen partis ſubmerſae quod ſit $= V$. Ex his pro corpore ſeu vaſe quocunque, cuius centrum grauitatis G horizontaliter in g transfertur, habebitur ad inclinationem inde ortam definiendam haec ae-

 quatio

quatio $3g\,V.V = wQ$. Eſt vero ob angulos ad O et g minimos $gV = Gg - w.GO$; quare cum ſit $3\,V.Gg = 3\,wV.GO + wQ$, erit ſinus anguli, quo vas circa axem horizontalem ad planum OGg normalem inclinabitur, ſcilicet $w = \frac{3V.Gg}{3V.GO + Q}$. Ad ſtabilitatem autem inueniendam interuallum, figura tantum plana conſiderata, centri grauitatis areae aFb a recta horizontali gV eſt inueſtigandum, quod reperitur $= OV - \frac{AC^3.w^2}{3\,AFB}$ ob $Pp = Qq\,\frac{1}{3}\,w.AC$ idemque interuallum pro corpore ſolido erit conſequenter $= OV - \frac{w^2Q}{6V}$. Eſt autem $OV = OG + w.Gg - \frac{w^2.OG}{2}$; vnde diſtantia centri magnitudinis partis ſubmerſae et centri grauitatis poſt inclinationem erit $= OG + w.Gg - \frac{w^2\,OG}{2} - \frac{w^2.Q}{6V} = OG + w.Gg\,\frac{w^2F}{2M}$, denotante M pondus corporis, et F ſtabilitatem eiusdem ante inclinationem; eſt enim $F = M(GO + \frac{Q}{3V})$. Quare poſt inclinationem erit firmitas $= M(OG + w.Gg - \frac{w^2.F}{2M} + \frac{Q}{3V}) = F + wM.Gg - \frac{w^2F}{2}$. reſpectu eius axis ſcilicet circa quem inclinatio eſt facta. Q. E. I.

Coroll. 1.

409. Cum, antequam centrum grauitatis de ſuo loco depellitur, ſtabilitas aequilibrii ſitus reſpectu axis horizontalis ad planum OGg normalis ſit $= M(GO + \frac{Q}{3V})$; ſi haec ſtabilitas dicatur $= F$, erit ſinus anguli inclinationis, qui ex translatione centri grauitatis G in g gignitur, $w = \frac{M.Gg}{F}$; exiſtente ſinu toto $= 1$.

Coroll. 2.

410. Sinus anguli ergo, quo vas circa axem horizontalem plano OGg normalem inclinatur, dum centrum grauitatis G motu horizontali per ſpatium Gg promouetur, eſt directe vt hoc ſpatium Gg et pondus vaſis coniunctim, ac reciproce vt ſtabilitas vaſis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 3.

411. Quo maior ergo corporis eſt ſtabilitas, eo magis id etiam ei inclinatione reſiſtit, quae oritur a translatione onerum de loco alio in alium; quam ob cauſam etiam nauibus maxima ſtabilitas eſt concilianda.

Coroll. 4.

412. Quia ſtabilitas poſt factam inclinationem inuenta eſt $= F + wM.Gg - \frac{w^2F}{2}$, atque eſt $w = \frac{M.Gg}{F}$; erit illa ſtabilitas $= F + \frac{M^2.Gg^2}{2F}$. Hoc igitur ſtabilitatis incrementum, quod poſt inclinationem accedit ob duas dimenſiones interualli quaſi infinite parui Gg omnino eſt negligendum.

Coroll. 5.

413. Quando ergo grauitatis centrum recta ſurſum deorſumue mouetur, nulla fit inclinatio ſed, ſola ſtabilitas immutatur; contra vero quando centrum grauitatis horizontaliter mouetur, ſtabilitas non afficitur, ſed ſitus aequilibrii per inclinationem ſolum mutatur.

Coroll. 6.

414. Quando ergo centrum grauitatis oblique mouetur, tum mutabitur tam ſtabilitas, quam ſitus corporis in aqua.

aqua. Quanta autem mutatio in vtroque accidat, ex propositionibus praecedentibus ſatis intelligere licet.

Scholion 1.

415. Quo haec facilius ad naues, in quibus ſtabilitatem reſpectu duorum tantum axium horizontalium, alterius longitudinalis a prora ad puppim protenſi, alterius latitudinalis ad illum normalis, cognitam eſſe ponimus, accommodari queant, motus centri grauitatis, niſi vel ſecundum longitudinem vel latitudinem fiat, reſolui debet in duos laterales, alterum in longitudine alterum in latitudine factum, quos ſeorſim conſiderari oportet. Illa enim centri grauitatis translatio ſecundum axem longitudinalem facta inclinationem circa axem latitudinalem generabit, cuius ſinus aequalis erit facto ex pondere nauis in viam centri grauitatis ſecundum longitudinem, diuiſo per ſtabilitatem reſpectu axis latitudinalis. Via vero centri grauitatis ſecundum latitudinem facta per pondus nauis multiplicata, ac per ſtabilitatem respectu axis longitudinalis diuiſa exprimet ſinum anguli inclinationis, quo nauis circa axem longitudinalem inclinabitur. Hae igitur duae inclinationes coniunctae praebebunt inclinationem nauis a translatione centri grauitatis per ſpatium quodcunque horizontale facta, ortam. At ſi centrum grauitatis ſimul vel aſcendat vel deſcendat, ante decrementum vel augmentum ſtabilitatis eſt inueſtigandum, quam in inclinationem inquiratur. Stabilitas enim, a qua inclinatio pendet, non prima in computum eſt ducenda, ſed ea, quae ob aſcenſum vel deſcenſum centri grauitatis iam eſt vel minuta vel aucta.

Scholion

Scholion 2.

416. Solutio huius problematis, quanquam id corpora quaecunque aquae insidentia spectabat, multo facilior et a corporum consideratione libera est facta, quod expressiones ex figurae planae contemplatione ortas ad naturam corporum extensorum accommodare licuit. Sequitur autem ista figurarum planarum ad corpora translatio ex comparatione formularum, quas in capite praecedente pro stabilitate tum figurarum planarum, tum corporum quorumque inuenimus. Cum enim pro figura plana sit stabilitas $= M\left(GO + \frac{2\,AC^3}{3\,AFB}\right)$, pro corpore autem ea reperta sit $= M\left(GO + \frac{Q}{3V}\right)$ vbi Q denotat aggregatum cuborum omnium applicatarum in sectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis transeuntem et axi inclinationis parallelum normalium; V vero exhibet volumen partis submersae. Quoties igitur ad eiusmodi expressiones peruenitur, a figura plana ad solidam fiet translatio, si loco areae AFB sub aqua versantis scribatur V volumen partis corporis submersae, atque pro $2AC^3$ ponatur Q, seu, $\frac{1}{2}$ Q pro AC^3. Cum igitur istius modi problemata multo facilius figuras tantum planas considerando resoluantur, huius comparationis beneficio solutiones eorundem problematum nullo negotio simul ad quaecunque corpora reduci poterunt; quod vti in isto problemate est factum, ita in sequente multisque aliis succedet.

PROPOSITIO 42.
Problema.

Tab. XXI. fig. 1.

417. *Si vasi seu naui cuicunque aquae insidenti nouum onus imponatur, inuenire tum situs tum stabilitatis mutationem, quae ab hoc nouo onere orietur.*

Solutio.

Sit AB sectio aquae, et AFB pars corporis aquae submersa, cuius centrum magnitudinis sit in O, totius vero corporis centrum grauitatis in G. Nunc posito totius corporis seu nauigii pondere $= M$ superaddatur illi in loco quocunque pondus m: Ad mutationem igitur ab hoc nouo onere imposito ortam indagandam, concipiatur id primo ipsi centro grauitatis G immissum. Cum nunc pondus corporis sit auctum, maior corporis pars aquae immergetur, quam ante: Subsidat igitur centrum grauitatis recta deorsum, vt nunc ab fiat sectio aquae atque aFb tanta sit corporis portio, quantam pondus $M+m$ desiderat. Sit sectionis aquae area $=E$, atque volumen partis submersae AFB sit $= V$: erit volumen partis $AabB$ de nouo immersae $= E.HI$, si quidem vti pono onus m est vehementer paruum respectu M, quo inaequalitatem inter AB et ab considerasse non sit necesse: Erit ergo $M : m = V : E.HI$, vnde fit $HI = \frac{mV}{ME}$. Quamuis autem iam debita corporis pars sub aqua versetur, tamen iste situs non erit aequilibrii, nisi huius partis submersae centrum magnitudinis etiamnum in recta FH existat. Manebit autem partis submersae centrum magnitudinis vt recta HF, si portionis $AabB$ centrum magnitudinis in eandem cadat, id quod euenit quan-

quando recta GO ſimul per centrum grauitatis ſectionis tranſeat; hoc ergo caſu quaeſitum iam conſtat, cum a F b futurus ſit aequilibrii ſitus. At ponamus ſectionis aquae centrum grauitatis non in I cadere, ſed in alio puncto C exiſtere; atque portionis AabB centrum magnitudinis cadet in Z punctum medium rectae $Cc = HI$; hoc igitur caſu ſitus a F b aequilibrii proprietate non erit praeditus; ſed corpus inclinabitur circa axem ad planum CIG normalem, ita vt ſectio aquae futura ſit $\alpha\beta$ cum priore angulum conſtituens $ac\alpha$ cuius ſinus ſit $= w$; quem angulum ante quam pro corpore inveſtigemus, quaeremus pro figura plana AFB. Cum igitur nunc $\alpha\beta$ ſit horizontalis ad eam, per O ducatur verticalis Oo, cui ex G horizontalis GV in V occurrat; atque quia hoc ſitu aequilibrium adeſſe ponitur, conſiderabo partem ſubmerſam α F β, quam ex his partibus $AFB + AabB - ac\alpha + bc\beta$ compoſitam eſſe conſiderari conueniet, quarum partium momenta reſpectu G ſe mutuo deſtruent. At eſt areae AFB momentum $= AFB.\ GV$ areae vero $AabB = AabB\ (GV - \alpha o + \alpha z) = AabB\ (GV - co - cz)$. Trianguli autem $ac\alpha$, cuius area eſt $= \frac{1}{2} w\, \alpha c.\ a c = \frac{1}{2} w.\ AC^2$; momentum, poſito eius centro grauitatis in P vt ſit $cp = \frac{2}{3} c\alpha = \frac{2}{3} CA$ erit $= \frac{1}{2} w\, AC^2\ (GV - \frac{2}{3} AC - co)$. Trianguli autem $bc\beta$ ſimili modo momentum erit $= \frac{1}{2} w.\ AC^2\ (GV + \frac{2}{3} AC - co)$. Cum igitur ſit pars aquae ſubmerſa $= AFB + AabB - ac\alpha + bc\beta$, erit momentum totius partis ſubmerſae $= AFB.\ GV + AabB\ (GV - co - cz) + \frac{2}{3} w.AC^3 = 0$. Transferatur nunc haec formula ad corpora, ponendo loco AFB volumen partis ſubmerſae V; loco AabB

 volu-

volumen $\frac{mV}{M}$; atque loco 2 AC^3 ſummam omnium cuborum applicatarum normalium in ſectione aquae ad axem per eius centrum grauitatis ductum, qui axis normalis ſit ad planum CIG; haec vero ſumma, quae in probl. 29 erat $\int(y^3+z^3)\,dx$ hic nobis breuitatis cauſa vocetur Q. Quamobrem pro corpore hanc habebimus aequationem $V.GV+\frac{mV}{M}(GV-co-cz)+\frac{1}{3}wQ=0$; quae cum ſit $GV=w.GO$; $co=CI-w.HO=CI-w.OI-\frac{wmV}{ME}$ atque $cz=w\,cZ=\frac{wmV}{2ME}$; tranſibit in hanc $wV.GO+\frac{wmV.GO}{M}-\frac{mV.CI}{M}+\frac{wmV.OI}{M}+\frac{wm^2V^2}{2M^2E}+\frac{1}{3}wQ=0$; ex qua elicitur $w=\frac{mV.CI}{MV.GO+\frac{1}{3}MQ+mV.GI+\frac{m^2V^2}{2ME}}$. Si nunc ſtabilitas reſpectu eiusdem axis circa quem inclinatio eſt facta, quae eſt $=M.GO+\frac{MQ}{3V}$ vocetur F, erit $w=\frac{m.CI}{F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}}$ pro qua aequatione ob *m* pondus reſpectu M valde paruum tuto vti licebit hac $w=\frac{m.CI}{F+m.GI}$. Stabilitas autem huius aequilibrii ſitus ab eo non differet, quae in ſitum *a*F*b* competeret; quae ob centrum magnitudinis ſupra O eleuatum interuallo $\frac{m}{M+m}(OI+\frac{mV}{2ME}$ erit $=(M+m)(GO+\frac{m}{(M+m)}(OI+\frac{mV}{2ME})+\frac{MQ}{3(M+m)V})=M.GO+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}+\frac{MQ}{3V}$. Cum igitur ante acceſſionem oneris *m* ſtabilitas eſſet $F=M.GO+\frac{MQ}{3V}$; erit nunc ſtabilitas $=F+m.GI+\frac{m^2V}{2ME}$, pro qua expreſſione pariter licebit vti hac $F+m.GI$. Quoniam autem hic onus *m* non ipſi centro grauitatis G immiſſum conſiderauimus, remoueatur nunc

nunc onus $\underline{m}$ in eum locum vbi reuera eſt poſitum, atque quaenam nouae mutationes eueniant, ex propoſitione praeced. intelligitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

418. Cum $F + m.GI + \frac{m^2V}{2ME}$ ſit ſtabilitas noui aequilibrii ſitus, quem nauis onere m in centro grauitatis collocato adipiſcitur, ſinus anguli inclinationis aequabitur facto ex onere impoſito $\underline{m}$ ducto in CI et diuiſo per hanc nouam ſtabilitatem.

Coroll. 2.

419. Eadem inclinatio prodit ſi onus m vbicunque in recta verticali FH collocetur, quia motu oneris ſurſum deorſumue facto ſitus aequilibrii non turbatur; at ſtabilitas minor maiorue euadet.

Coroll. 3.

420. Si onus $\underline{m}$ in rectae verticalis FI puncto K imponatur, ſtabilitas ea quae prodiret, ſi centro grauitatis G foret immiſſum, diminui debet facto m. GK. Hoc ergo caſu ſtabilitas erit $= F + m.\,IK + \frac{m^2V}{2ME}$.

Coroll. 4.

421 Reiecto ergo termino $\frac{m^2V}{2ME}$ perſpicuum eſt impoſitione oneris noui ſtabilitatem augeri, ſi onus infra ſectionem aquae collocetur. Contra vero ſtabilitas diminuetur, ſi onus ſupra aquam ponatur.

Coroll. 5.

422. Quando ergo centrum grauitatis ſectionis aquae C in ipſam verticalem FGI incidet, tum nulla fiet inclinatio, ab onere impoſito, dummodo oneris centrum grauitatis quoque in rectam FGI incidat.

Coroll. 6.

423. Si autem onus m non in rectam FI ponitur ſed extra eam, atque punctum C non incidat in I, duplex proueniet inclinatio, altera ſcilicet hic definita et ab interuallo CI pendens, altera vero ex praecedente propoſitione orta et a diſtantia oneris a recta FI pendens.

Scholion. 1.

424. Ex hac ergo propoſitione clarius intelligitur quantum eiusmodi nauigia, quae ſectionis aquae centrum grauitatis et partis ſubmerſae centrum magnitudinis in eadem recta verticali, in quam ſimul totius nauis centrum grauitatis cadere debet, habeant poſita aliis, quae hac proprietate carent, antecellant. In eiusmodi enim nauibus, ſi noua onera, vel ipſi centro grauitatis immittantur, vel in recta verticali per id tranſeunte collocentur, nulla accidit inclinatio, ſed nauis tantum verticaliter deſcendendo aquae profundius immergetur. Atque etiam ſi onus nouum non in rectam verticalem per centrum grauitatis ductam imponatur, vnica tantum oritur inclinatio circa axem quendam horizontalem, cum in aliis nauigiis, in quibus haec proprietas locum non inuenit, duplex inclinatio eueniat. Quo autem, ſi nauis profundius immergitur,

gitur, recta verticalis per centrum grauitatis ducta etiamnum per nouae sectionis aquae centrum grauitatis trenseat, necesse est vt sectiones nauis parallelae sectioni aquae principali, si non omnes, tamen proximae saltem sua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant posita. At si omnes sectiones nauis horizontales vel eae saltem, quae aquae immerguntur, ita sint comparatae, vt earum centra grauitatis sita sint in eadem recta verticali, tum sponte in eandem rectam cadet centrum magnitudinis partis submersae. Quamobrem ista regula, quae praecipit, vt vna recta verticalis per singularum sectionum horizontalium centra grauitatis transeat, ingentem afferet vtilitatem ad naues aptissime construendas; hac enim obseruata pluribus satisfit requisitis, quae in perfecta naui inesse debent; prout ex antecedentibus intelligere licet, et in sequentibus fusius docebitur.

Scholion 2.

425. Quae in hac propositione de impositione noui oneris sunt dicta, eadem quoque locum habent, si naui potentia verticalis applicetur, si enim potentia verticalis deorsum vrgeat, tum idem orietur effectus ac si onus nouum, cuius pondus illi potentiae aequiualeat, in eo ipso loco, in quo potentia applicatur, imponeretur: sin autem potentia sursum trahat, tum effectus erit contrarius, atque ex solutione problematis non difficilius determinabitur, ponendo oneris vim negatiuam, seu loco m scribendo $-m$. In hoc vero discrimen inter onera et potentias consistet, quod impositione onerum tum vis inertiae nauis tum etiam eius momentum immutetur, atque insuper centrum grauitatis de suo loco transferatur,

quae

quae omnia, si merae potentiae agant, nulli mutationi sunt abnoxia. Quamobrem oportebit effectum huiusmodi potentiarum seorsim scrutari, quatenus scilicet applicatione potentiarum nulla naui noua materia accedit; id quod mox in hoc capite, quod effectui quarumcunque potentiarum naues sollicitantium determinando est destinatum. Quae tractatio, quo dilucidius perspiciatur, ante omnia est aduertendum omnem effectum, qui a potentiis nauigia aliaue corpora aquae innatantia sollicitantibus, quintuplicem esse posse; cum huiusmodi corporum status quinque diuersis modis turbari queat. Primum enim nauis vel corpus aquae insidens a vi aliena ita affici potest, vt vel profundius immergatur, vel ex aqua extrahatur; qui effectus a potentiis verticalibus oritur, atque ex propositione praesente facile iudicatur. Secundus potentiarum effectus in hoc constat, vt nauis de suo loco motu horizontali propellatur, ad quem obtinendum remi, venti ipse aquae motus aliaeque vires adhiberi solent. Tertio nauis a potentiis inclinatur circa axem quempiam horizontalem per centrum grauitatis transeuntem, qui ad planum verticale per spinam ductum sit normalis. Quarto inclinatio fieri potest circa axem horizontalem secundum nauis longitudinem per centrum grauitatis ductum; ad duplicem enim hanc inclinationem omnis inclinatio, quae circa axem quemcunque fit, reduci potest. Quinto denique nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuerti potest, talemque effectum in nauibus gubernaculum praecipue producit. Hi autem quinque effectus, quanquam inter se ita sunt connexi vt plerumque plures ab

vna

vna potentia oriantur, tamen ſinguli ſeparatim conſiderari calculoque elici poſſunt; quemadmodum ex principiis ante traditis intelligere licet. Vnusquisque enim effectus perinde producitur a potentiis atque determinatur, ſiue reliqui effectus ſimul producantur ſiue ſecus; et hancobrem ſi quaecunque potentiae nauigium ſollicitent, totalis effectus cognoſcetur, ſi ſeparatim, quantum in ſingulis memoratis quinque effectuum ſpeciebus efficiatur, diligenter inueſtigetur. Quo circa vnumquemque de his quinque effectibus ſeorſim contemplabor, ac quomodo ſinguli a potentiis ſollicitantibus producantur, animum a reliquis abſtrahendo, oſtendam. Ante omnia autem ſi propoſita fuerit potentia nauem corpusue quodcunque aquae innatans ſollicitans, inquirendum eſt, vtrum ea eiusmodi effectum, de quo quaeritur, producere valeat, an minus; non enim quaevis potentia ad quemuis effectum producendum eſt apta. Deinde ſi compertum fuerit potentiam eiusmodi effectum exerere, tum quantitas iſtius effectus determinari debebit. Hocque modo cum ſingulae quinque effectuum ſpecies memoratae erunt pertractatae, facile erit iudicare, quid potentiae quaecunque in data naui ſint effecturae.

PROPOSITIO 43.

Problema.

426. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum, quem exerent in naui magis minusue aquae immergenda.*

Solutio.

Ad diiudicandum, quanto magis minusue nauis a potentiis immergatur, ad eius centrum grauitatis reſpici

oportet, et inuestigari, vtrum id a potentiis deorsum vel sursum vrgeatur, an secus. Quamobrem, sicut ad motum centri grauitatis cognoscendum facere oportet, omnes potentiae in directionibus sibi parallelis ipsi centro grauitatis applicatae concipi debebunt; singulaeque resolui in verticales et horizontales, quarum illae solae eum effectum producent, in quem hic inquirimus. Si igitur fuerit quaecunque potentia p cuius directio cum horizonte angulum faciat, cuius sinus sit m, posito sinu toto $= 1$; erit mp ea potentia, qua nauis sursum deorsumue vrgebitur; sursum scilicet sollicitabit nauem, si directio potentiae sursum vergat, deorsum vero si deorsum. Quare si ex singulis potentiis sollicitantibus valores mp eliciantur, et in vnum colligantur, habebitur totalis vis nauem vel sursum eleuans vel deorsum deprimens. Aequiualeat ista vis collecta ponderi P, tendatque deorsum; si enim sursum agat, tantum valorem P negatiuum accipere oportebit. Ab hac ergo vi P, si quidem P affirmatiuum habuerit valorem, nauis magis immergetur; quanto profundius autem immergatur ita definietur. Sit massa seu pondus totius nauis $= M$; volumen partis submersae $= V$, et sectio aquae $= E$, ponatur vero altitudo verticalis, qua nauis aquae profundius immergetur $= Z$, quam pono vehementer exiguam, quod vires verticales seu pondus P plerumque valde exiguum respectu ponderis nauis M esse soleat. Erit ergo post auctam nauis immersionem volumen partis submersae $= V + Ez$, hincque nascetur per principia hydrostatica ista proportio $M : V = M + P : V + Ez$, seu ista aequatio $PV = MEz$, ex qua oritur $z = \frac{PV}{ME}$. Profundius

fundius itaque centrum grauitatis nauis subsidet, a vi P, et descendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$. At si potentiae sollicitantes nauem eleuent, atque totalis vis eleuans aequiualeat ponderi P, tum centrum grauitatis ascendet per interuallum $\frac{PV}{ME}$, seu quod idem est, descendet per interuallum $-\frac{PV}{ME}$, quae expressio ex illa nascitur ponendo $-P$ loco P, vti iam innuimus. Q. E. I.

Coroll. 1.

427. Si ergo omnes potentiae sollicitantes directiones habeant horizontales, vel si potentiae verticales quae ex illis oriuntur se mutuo destruant, tum nauis neque magis deprimetur in aquam, neque eleuabitur.

Coroll. 2.

428. Si plures potentiae nauem sollicitent, tum ex singulis ascensum descensumue centri grauitatis concludere licebit, quippe qui singuli effectus collecti verum centri grauitatis siue ascensum siue descensum indicabunt.

Coroll. 3.

429. Quia centri grauitatis ascensus descensusue fit per spatium $\frac{PV}{ME}$; at vero volumen partis submersae V semper sit proportionale ponderi nauis M, sequitur maiorem minoremue nauis immersionem proportionalem esse vi vrgenti P directe, et sectioni aquae E inuerse.

Coroll. 4.

430. Quo ergo maior fuerit sectio aquae, eo minor erit mutatio partis aquae immersae ab eadem vi sol-

 licitan-

licitante orta. Quamobrem quo naues eiusmodi mutationi minime ſint obnoxiae, ſectionem aquae ampliſſimam efficere expediet.

Coroll. 5.

431. Si aquae volumen, cuius pondus aequale ſit ponderi P, ponatur u, atque hoc volumen adhibeatur ad quantitatem vis ſollicitantis exprimendam, erit ob $V : M = u : P$ ſpatium, quo centrum grauitatis ſurſum deorſumve vrgetur $= \frac{u}{E}$; ex qua expreſſione facillime, quanto nauis magis minusue aquae immergatur, intelligi poteſt.

Scholion.

432. Ad effectum in omni corpore, quem potentiae ſollicitantes producunt, cognoſcendum duplici inueſtigatione eſt opus, altera qua motus progreſſiuus centri grauitatis definitur, altera qua motus corporis gyratorius circa centrum grauitatis quaeritur. Eandem ergo rationem in effectu potentiarum nauigia aliaue corpora aquae innatantia ſollicitantium inquirendo adhiberi oportet, quae cum natura aquae, qua libertas corporum ſeſe quacunque mouendi reſtringitur, coniungi debet. Quod enim primum ad motum centri grauitatis attinet, eum in corporibus aquae innatantibus duplicem conſiderari conuenit, prout eius directio vel horizontalis eſt vel verticalis; motus namque horizontalis ſi ſemel fuerit impreſſus, perpetuo conſeruatur, niſi quatenus ab aquae reſiſtentia retardatur, motus verticalis autem ſtatim ſiſtitur, ac tanta pars ſub aqua verſatur, quantam hic definiuimus; atque hancobrem in iſta propoſitione non tam ipſum centri grauitatis aſcenſum deſcenſumue determinare ſuſcepimus, quam terminum illum

illum quo ſiſtitur, et in quo centrum grauitatis acquieſcit. Quanquam enim reuera grauitatis centrum, cum moueri incepit, ſubito non quieſcit, tamen eiusmodi motu oſcillatorio definiendo ſuperſedendum cenſuimus, cum ab ipſa aqua ſtatim ſiſtatur. Pergo igitur ad alterum caſum motus centri grauitatis progreſſiui inueſtigandum, quo a potentiis ſollicitantibus motum in directione horizontali adpiscitur.

PROPOSITIO 44.
Problema.

433. *Si nauis a quibuscunque potentiis ſollicitetur, determinare effectum earum in motu horizontali progreſſiuo vel generando vel alterando.*

Solutio.

Quoniam de motu centri grauitatis progreſſiuo quaeſtio eſt, omnes potentiae in directionibus parallelis ipſi centro grauitatis applicatae concipi debent: et quoniam motus tantum horizontalis inueſtigatur, omnes potentiae reſoluendae ſunt in verticales et horizontales, quae poſteriores tantum huic inſtituto ſunt accommodatae. Si igitur quaecunque potentia fuerit p, cuius directio cum horizonte faciat angulum cuius ſinus ſit m, erit $p\sqrt{(1-mm)}$ potentia horizontalis effectum hic quaeſitum producens. Omnium ergo potentiarum ſollicitantium quaerantur hoc modo vires horizontales, earumque, ſi in ipſo centro grauitatis ſint applicatae, tum media directio tum potentia aequiualens, quae exprimatur pondere P. Iam ſit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta,

Tab. XXI. fig. 2.

atque GP ſit media directio omnium potentiarum ſollicitantium, quatenus motum horizontalem afficiunt. Sollicitabitur ergo nauis in directione GP a potentia P, cuius vis aequiualeat ponderi P. Si nunc pondus totius nauis ponatur $= M$, erit vis accelerans $= \frac{P}{M}$, qua in directione GP accelerabitur. Scilicet ſi nauis iam moueatur in directione GP celeritate debita altitudini v, erit, dum nauis elementum ſpatii dx abſoluet, $dv = \frac{Pdx}{M}$. At ſi motus, quem nauis iam habet non fiat in directione GP, ſed in alia GM, quae cum GP angulum faciat MGP, cuius ſinus ſit $= m$, coſinus vero $= n$ poſito ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $mm + nn = 1$; tum a vi ſollicitante P cum celeritas nauis, quae debita ſit altitudini v mutabitur, tum ipſa directio MG. Celeritas autem augebitur a vi $\frac{nP}{M}$ ita vt dum nauis elementum dx percurrit, futurum ſit $dv = \frac{nPdx}{M}$. A vi autem altera normali $\frac{mP}{M}$ cogetur nauis a ſemita rectilinea GM deflectere verſus directionem GP, ac dum percurret ſpatiolum dx, declinabit a directione GM verſus GP angulo, cuius ſinus erit $= \frac{mPdx}{2Mv}$. Atque ex his tam generatio quam alteratio motus nauium progreſſiui a potentiis quibuscunque orta, cognoſcitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

434. Si ergo nauis quieuerit, a potentiis ſollicitantibus motum conſequetur in ipſa directione media GP; eoque celerius moueri incipiet, quo maior fuerit vis P, ſimulque quo minus fuerit pondus ipſius nauis M.

Co-

Coroll. 2.

435. Simili modo si nauis iam habeat motum in ipsa directione GP, is accelerabitur eo fortius, quo maior fuerit potentia P, et quo minus fuerit pondus nauis M. Momentum enim accelerationis est directe vt vis P, et reciproce vt pondus nauis.

Coroll. 3.

436. Sin autem motus, quem nauis iam habet, fiat in alia directione GM, tum acceleratio eo erit maior, quo minor fuerit angulus MGP; proportionalis enim est ceteris paribus cosinui anguli MGP.

Coroll. 4.

437. Quod autem in hoc casu ad declinationem a directione GM attinet, ea proportionalis erit directe ipsi potentiae P et sinui anguli MGP coniunctim, inuerse vero ponderi nauis et quadrato celeritatis coniunctim.

Coroll. 5.

438. Quo celerius igitur nauis iam mouetur, eo minus ab eadem vi oblique agente de via sua deflectitur; atque ceteris paribus erit deflexio in reciproca ratione duplicata celeritatis.

Scholion.

439. Haec omnia non solum ita se habent, sed etiam totus nauis motus ad datum quoduis tempus ex iis posset definiri, si modo aqua nullam opponeret resistentiam, neque tam ipsum motum retardaret, nec effectum

poten-

potentiarum turbaret. Propter aquae resistentiam enim primum motus nauium insigniter retardatur, idque eo magis quo celerius nauis mouetur; aestimatur namque experientiam consulendo aquae resistentia quadrato celeritatis proportionalis. Deinde vero directio resistentiae praecipue est attendenda, quae nisi in ipsam motus nauis directionem incidat, simul etiam eius directionem afficit, atque navem de via sua deflectit. Quamuis autem in sequente demum capite effectum resistentiae simus indagaturi, tamen inter potentias locum habet, et cum eius quantitas et directio fuerit definita, ipse effectus ex his ipsis principiis determinari debet. Quamobrem si nauis iam habeat motum, cum potentiis sollicitantibus simul resistentia est coniungenda, et effectus, quem exerit tam in motu nauis afficiendo, quam nauem inclinando et conuertendo ex hoc capite erit deriuandus. Sic in hac propositione PM exprimere poterit mediam directionem non solum potentiarum sollicitantium sed etiam resistentiae ab aqua ortae; atque P denotare vim coniunctim ex potentiis sollicitantibus et resistentia natam. Quare cognitis resistentiae cum quantitate tum directione, ex hac propositione nauis celeritas et directio quouis loco, dum promouetur, exquisite definiri poterit.

PROPOSITIO 45.
Problema.

440. *Si nauis a potentiis quibuscunque sit sollicitata, inuenire momenta virium nauem tum circa axem horizontalem longitudinalem tum latitudinalem inclinantium.*

Solu-

Solutio.

Sit ACBD ſectio nauis horizontalis per centrum grauitatis G facta, in qua extat AB axis longitudinalis, CD vero axis latitudinalis, circa quorum axium vtrumque, quanta vi data potentia nauem inclinet, hic inueſtigari oportet. Intelligitur autem pro vtroque axe ſimile ratiocinium eſſe inſtituendum, ſimilique modo vim nauem tam circa axem AB, quam circa CD inclinantem eſſe indagandam; quamobrem ſufficiet pro alterutro tantum axe puta AB quaeſtionem abſoluiſſe. Primo autem notandum eſt, nullam potentiam, cuius directio vel cum axe AB concurrat vel eidem ſit parallela vel tantum cum hoc axe in eodem plano ſit ſita, nauem circa hunc axem conuertere poſſe. Quamobrem eae tantum potentiae hic ſunt conſiderandae, quarum directiones cum axe AB non in eodem plano ſunt poſitae. Sit igitur quaecunque potentia nauem ſollicitans aequiualens ponderi p, per cuius directionis punctum quoduis ad axem AB ducatur perpendicularis, cuius longitudo ſit f; deinde concipiatur planum per axem AB, et hanc perpendicularem ductum, et quaeratur angulus, quem directio potentiae cum hoc plano conſtituit, cuius ſinus ſit $= m$. Quo facto momentum potentiae ad nauem circa axem AB conuertendam erit $= mpf$. Simili modo quaerantur eiusmodi momenta ex ſingulis potentiis ſollicitantibus, et omnes, reſpectu habito ad ipſam actionem, vtrum in eandem plagam, an in contrariam nauem conuertere conentur, in vnum colligantur, quae reducentur ad eiusmodi ſimplicem expreſſionem Pa, in qua P pondus quodpiam, a vero rectam

Tab. XXI. fig. 3.

quandam denotabit. Hoc igitur modo quotcunque potentiae nauem ſollicitauerint, momenta reſpectu tam axis A B quam axis CD definientur. Q. E. I.

Coroll. 1.

441. Quia indifferens eſt quodnam punctum in directione potentiae ſollicitantis accipiatur, poterit planum quodpiam per axem ductum pro lubitu accipi, idque punctum notari, in quo directio potentiae illi plano occurrit.

Coroll. 2.

442. Expediet ergo ad hoc commodiſſime tranſigendum planum accipere vel verticale vel horizontale, per axem, circa quem momentum conuertens inquiritur, ductum. Saepius autem horum planorum alterum alteri erit anteferendum; quae electio facillime cuique patefiet.

Coroll. 3.

443. Perſpicitur ergo, ſi cuiuspiam potentiae directio vel per ipſum centrum grauitatis G tranſeat, vel in plano ACBD ſita ſit, tum nauem circa neutrum axem conuerſum iri, neque propterea vllam inclinationem pati.

Scholion.

444. Cum circa quemcunque axem inclinatio duplex ſit, pro duplici plaga ſecundum quam inclinatio fieri poteſt, hoc in inquiſitione momentorum diligenter eſt attendendum, quo omnibus momentis definitis appareat, an omnino in eandem plagam nauem conuertere conentur, an

an ſecus: illo enim caſu omnia momenta in vnam ſummam colligantur, hoc vero ea momenta, quae in plagam oppoſitam tendant, ſubtrahi debent. Quo autem facilius hoc diſcrimen oculis obuerſetur, atque citiſſime animaduertatur, pro vtroque axe ambas plagas probe inter ſe dignouiſſe, et idoneis nominibus appellaſſe iuuabit. Ita nauis circa axem latitudinalem CD duplici modo inclinari poteſt, vel proram vel puppim verſus, inclinatur autem verſus proram vel puppim, dum vel prora vel puppis magis immergitur. Circa axem longitudinalem AB autem inclinatio fit vel ad latus dextrum vel ſiniſtrum, quae denominatio deſumitur ab eo, qui in puppi ſtans proram aſpicit. In colligendis igitur momentis plurium potentiarum reſpectu axis vel AB vel CD, probe eſt notandum in vtram plagam quaeque potentia conetur inclinare nauem, quo collectio fiat legitima. Inuento autem momento totali ex omnibus potentiis ſollicitantibus collecto, ipſa inclinatio eſt definienda, id quod ſequente propoſitione praeſtabitur.

PROPOSITIO 46.

Problema.

445. *Si nauis a potentiis quibuscunque ſollicitetur, determinare angulum, quo ea tum circa axem latitudinalem tum longitudinalem inclinetur.* Tab. XXI. fig. 3.

Solutio.

Conſideremus primo axem latitudinalem CD, ſitque momentum ex omnibus potentiis ortum ad nauem circa hunc axem CD ſiue proram ſiue puppim verſus inclinandam

 dam

dam $= Pa$; atque anguli inclinationis, quem producit, ſinus ſit $= w$, quem tanquam vehementer paruum ſpecto. Sit iam ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis latitudinalis $CD = F$, eo modo expreſſa, quo in capite praecedente fecimus, erit Fw momentum, quo nauis ſeſe proprio conatu in ſitum erectum reſtituere annititur. Cum igitur hunc ſitum a potentiis ſollicitantibus conſeruari ponamus, neceſſe eſt vt ſit $Pa = Fw$, ex qua aequatione oritur anguli inclinationis productae ſinus $w = \frac{Pa}{F}$. Simili modo, ſi dicatur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = \Phi$, atque momentum totale potentiarum nauem circa hunc axem inclinare tendentium fuerit $= Qb$, erit anguli ad quem nauis actu circa axem AB inclinabitur ſinus $= \frac{Qb}{\Phi}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

446. Conſtat igitur, quod quidem ex praecedentibus iam manifeſtum eſt, inclinationem, quam data potentia producit, eo fore minorem, quo maior fuerit ſtabilitas nauis reſpectu axis, circa quem fit inclinatio.

Coroll 2.

447. Stabilitas noſtro recepto modo deſignatur per factum ex pondere nauis in lineam quandam rectam: vnde facile intelligitur fractionem $\frac{Pa}{F}$ denotare merum numerum, qui exprimet ſinum anguli inclinationis poſito ſinu toto $= 1$.

Co-

Coroll. 3.

448. Erit ergo ſinus anguli inclinationis ad ſinum totum, vti momentum potentiarum inclinationem efficientium, ad ſtabilitatem nauis reſpectu illius axis circa quem fit inclinatio.

Coroll. 4.

449. Si igitur ſtabilitas nauis reſpectu cuiuspiam axis decies maior fuerit, quam momentum virium inclinantium, tum inclinatio minor erit 6 gradibus, prodit enim hoc caſu angulus inclinationis circiter $5^\circ, 45'$.

Coroll. 5.

450. Intelligitur etiam, quo magis vires inclinantes a centro grauitatis fuerint remotae, eo maius fore momentum ad inclinandum, et propterea inde eo maiorem produci inclinationem.

Scholion.

451. Quemadmodum a potentiis centrum grauitatis ſollicitantibus in nauigiis duplex naſcitur effectus, quorum alter in maiore vel minore immerſione conſiſtit, alter vero in promotione nauis horizontali, ita ex potentiis, quae corpora circa centrum grauitatis gyrari ſolent, in nauibus triplex effectus oritur, pro tribus axibus, circa quos nauis conuerti poteſt. Si enim in omni naui tres axes per centrum grauitatis tranſeuntes concipiamus, duos horizontales, alterum longitudinalem ſcilicet, alterum latitudinalem, et vnum verticalem, nauis a potentiis circa ſingulos conuerti poterit, ita vt conuerſio circa vnum

 non

non turbet conuerſionem circa reliquos. Effectus autem harum conuerſionum circa tres iſtos axes propter actionem aquae inter ſe penitus ſunt diſſimiles, et hancobrem ſeorſim ſunt euoluendi. Vires enim, quae tendunt ad nauem circa alterutrum axem horizontalem conuertendam, effectum ſuum ſtatim conſequuntur, qui cum ſemel fuerit productus, nulla amplius mutatio in naui oritur. Conſiſtit enim harum virium effectus in inclinatione circa eiusmodi axem ad certum angulum vsque, quoad iſtae vires a ſtabilitate nauis in aequilibrio conſeruentur; atque ſi inclinatio fuerit facta ad hunc angulum, tum nauis in hoc ſtatu perſiſtit, ſi quidem vires eaedem maneant; at quam primum vires vel augentur vel diminuuntur vel penitus ceſſant, tum inclinatio vel augebitur vel diminuetur vel nauis prorſus ſe in ſitum naturalem recipit, niſi forte ob motum iam receptum motus oſcillatorio ſimilis producatur. Longe aliter autem eſt comparata ratio conuerſionis circa axem verticalem, viribus enim quae eiusmodi conuerſionem producunt, nulla vis propria reſiſtit, et hancobrem nauis a talibus viribus circa axem verticalem tamdiu conuertitur, quamdiu vires agunt, neque conuerſio ante ſiſtitur, quam vires penitus ceſſauerint, atque motus conuerſionis iam conceptus a reſiſtentia aquae abſorbeatur. Quocirca ad effectum eiusmodi virium conuertentium cognoſcendum ipſum motum conuerſionis indagari oportet.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. XXI. fig. 5.

452. *Si navis vel corpus quodcunque aquae innatans ſollicitetur a potentiis quibusuis, determinare vis momentum, quo*

quo corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem circumagetur.

Solutio.

Sit ACBD sectio horizontalis nauis per centrum gravitatis G facta, atque EGF axis verticalis per centrum grauitatis G ductus, circa quem motus conuersionis inquiritur. Duplici autem modo nauis circa hunc axem gyrari potest, conuertendo se vel ad dextram vel ad sinistram; dico autem nauem se ad dextram conuertere, quando prora ei, qui in puppi stat proramque intuetur, ad dextram rotari videtur; cui conuersioni contrarius motus ad sinistram fieri dicitur, de qualibet igitur potentia nauem circa hunc axem verticalem circumagere valente videndum est, vtrum ea nauem versus dextram an versus sinistram rotari cogat, quo, si plures agant potentiae effectus conspirantium addi, contrariarum vero subtrahi facillime queant. Animaduertendum autem est ante omnia, nullam potentiam, cuius directio vel transeat per centrum grauitatis, vel sit verticalis, vel cum axe EF in eodem plano consistat, eiusmodi motum conuersionis producere valere. Cum igitur omnes potentiae resoluantur in verticales et horizontales, in solis horizontalibus causa eiusmodi conuersionis circa axem EF erit quaerenda. Ita autem ipsa vis conuertens inuestigabitur: Concipiatur planum horizontale in quo sita sit directio potentiae cuiuspiam horizontalis, noteturque punctum in quo axis EF ab hoc plano secabitur. Deinde ex hoc puncto in directionem potentiae ducatur normalis, quae per ipsam potentiam multiplicata dabit momentum eius vis ad motum gyratorium circa axem

EF

EF producendum. Vel ex ſupra dicto axis EF puncto recta quaecunque duci poteſt ad directionem potentiae ſollicitantis horizontalis, haecque recta tum in ſinum anguli quem cum directione potentiae conſtituit, tum in ipſam potentiam ducta dabit momentum. Si igitur ex ſingulis potentiis ſollicitantibus horizontalibus iſtiusmodi momenta eliciantur, eaque, ratione habita, vtrum omnia ad eundem effectum producendum conſpirent, an quaedam ſint contraria, in vnam ſummam colligantur, prodibit eiusmodi expreſſio Pa, factum ſcilicet ex pondere quodam in quampiam rectam datam, quod factum exhibebit totale virium momentum, quo motus conuerſionis circa axem EF generabitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

453. Omnes igitur potentiae horizontales exceptis iis, quarum directiones tranſeunt per axem conuerſionis EF, tendent ad nauem circa hunc axem conuertendam, atque actu conuertent, niſi plures eiusmodi potentiae ſe mutuo deſtruant.

Coroll. 2.

454. Quaecunque igitur potentia horizontalis eo maiorem habebit vim ad nauem circa axem verticalem circumagendam, quo maior fuerit tum ipſa vis, tum eius diſtantia ab axe conuerſionis EF, quae diſtantia menſuratur recta horizontali tam ad axem, quam ad directionem potentiae normali.

Coroll. 3.

455. Cum autem nauis quoque a potentiis horizontalibus propellatur, iisdem potentiis, quibus nauis promovetur

vetur, nauis etiam circa axem verticalem conuertetur, nisi media directio omnium per ipſum axem tranſeat.

Coroll. 4.

456. Ne igitur, quae potentiae nauem promouent, eaedem nauem declinent ſeu circa axem verticalem conuertant, neceſſe eſt vt aut ſingularum potentiarum ſollicitantium directiones, aut ſaltem earum media directio per verticalem e centro grauitatis eductam tranſeat.

Scholion.

457. In nauibus iſte motus conuerſionis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem maximi eſt momenti, eique producendo, quoties opus eſt, gubernaculum eſt deſtinatum, cuius ope nauis ſi in motu fuerit conſtituta, tum ad dextram tum ad ſiniſtram poteſt deflecti. Quoniam enim naues vel exacte vel ſaltem proxime ſecundum directionem ſpinae progredi ſolent, actione gubernaculi ipſe nauis curſus immutatur: ſcilicet quando conuerſio fit ad dextram, tum ſimul curſus nauis ad dextram hoc eſt a ſeptentrione verſus orientem, vel hinc verſus auſtrum, vel ab auſtro verſus occaſum, hincue verſus boream deflectitur: in plagas autem contrarias deflectitur curſus, quando conuerſio fit ad ſiniſtram: ex his igitur iam intelligitur effectum gubernaculi eo fore maiorem, quo longius id a centro grauitatis remoueatur, quamobrem ipſi etiam in extrema puppi ſuus aſſignatus eſt locus. Praeterea vero etiam eximius eſt gubernaculi vſus in curſu nauis directo et immutato conſeruando, quo opus eſt quando potentiae ſollicitantes ſimul

 vim

vim habent nauem conuertendi circa axem verticalem, tum enim ope gubernaculi haec vis est destruenda. Ne autem hoc eueniat, quod ingens merito censetur incommodum, in id maxime incumbi solet, vt tam potentiarum sollicitantium media directio per illum axem verticalem transeat, quam resistentia a quae etiam vi careat nauem conuertendi. Quamobrem quo istud incommodum euitetur, tam idoneus malorum locus, quippe quibus vires applicari solent nauem propellentes, diligenter eligendus, quam anterior nauis figura, a qua resistentia eiusque directio pendet, summo studio est determinanda; quae omnia in sequentibus fusius euoluentur. Nunc autem restat, vt ipsum motum rotationis circa axem verticalem determinemus, in quo, quia de resistentia nondum constat, animum ab aquae resistentia omnino abstrahemus; parum autem interest nosse quantum iste motus conuersionis a resistentia aquae retardetur; dummodo enim constet, istum effectum sequi, atque iudicari queat, quomodo se habeat eius celeritas pro variis potentiis sollicitantibus, pro variaque nauium conditione, ad institutum abunde sufficit. Quamobcausam etiam in sequentibus capitibus tantum inuestigabimus, quantum resistentia aquae motum nauis progressiuum retardet, neque erimus solliciti, quantum conuersionem seu deflexionem impediat.

PROPOSITIO 48.
Problema.

458. *Si nauis a potentiis ad motum rotatorium circa axem verticalem incitetur, determinare ipsum motum, quo circa hunc axem conuertetur.*

So-

Solutio.

Ex iis quae ſupra de motu rotatorio circa axem quempiam per centrum grauitatis tranſeuntem definiendo ſunt demonſtrata, intelligitur ad hoc negotium duabus opus eſſe rebus, momento ſcilicet potentiarum reſpectu illius axis ſumto, atque momento materiae ſeu inertiae corporis reſpectu eiusdem axis. Cum igitur in praecedente propoſitione momentum ex omnibus potentiis ſollicitantibus reſultans definire docuerim, quod tendat ad nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum convertendam, quod ſit $= Pa$ facto ſcilicet ex pondere quopiam P in rectam datam a, ſupereſt vt momentum inertiae ſeu materiae totius nauis reſpectu eiusdem axis determinetur, quod inuenietur multiplicando ſingulas nauis particulas per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe illo verticali, quorum productorum aggregatum huiusmodi habebit formam Mb^2, in qua M denotat pondus nauis, b vero rectam longitudine datam. Vis igitur gyratoria, qua nauis actu circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem circumagetur erit $= \frac{Pa}{Mb^2}$, ex qua motum angularem definire licebit. Si nunc ponamus nauem iam tantum habere motum angularem circa axem verticalem, vt punctum quodpiam in diſtantia f ab axe ſitum celeritatem habeat altitudini v debitam, erit, dum illud punctum arculum dx abſoluit $dv = \frac{Pafdx}{Mb^2}$: Hinc integrando fiet $v = \frac{Pafx}{Mb^2}$, vbi x arcum ab illo puncto ab initio motus iam deſcriptum denotat. Sit autem s angulus iam deſcriptus, eſt $s = \frac{x}{f}$; ideoque $\frac{v}{ff} = \frac{Pas}{Mb^2}$. Celeritas igitur angularis iam

acquiſita erit $= \frac{\sqrt{v}}{f} = \sqrt{\frac{Pas}{Mb^2}}$; ſiquidem reſiſtentia aquae animo remoueatur. Q. E. I.

Coroll. 1.

459. Manente igitur vi conuertente eadem nauis eo facilius circa axem verticalem conuertetur, quo minus fuerit momentum inertiae nauis reſpectu eiusdem axis.

Coroll. 2.

460. Iſta ergo nauis conuerſio eo facilius abſoluetur, quo propius omnia onera ad axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem collocentur. Contra autem, ſi omnia onera ab hoc axe maxime fuerint remota, conuerſio fiet difficillima.

Coroll. 3.

461. Prout ergo nauis vel facillime conuerſionem admittere, vel conuerſioni maxime reſiſtere debet, ita inde ratio onerationis reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti erit petenda.

Coroll. 4.

462. Hinc intelligitur nauem eo citius actioni gubernaculi obſequi, quo propius merces reliquaque onera ad axem verticalem collocentur. Hoc enim pacto momentum inertiae nauis eo minorem obtinebit valorem.

Coroll. 5.

463. Ex iſta ergo propoſitione, ſi impulſus aquae in gubernaculum fuerit definitus, effectus gubernaculi pro quaque naui facile poterit diiudicari ac determinari.

Scho-

Scholion.

464. Expositi igitur atque definiti sunt quinque effectus; quos potentiae in corpore quocunque aquae innatante producere valent, qui ita a se inuicem sunt disiuncti, vt quisque sine reliquis locum habere queat. Quamobrem si, dum corpus aquae innatans a potentiis quibuscunque sollicitetur, singuli isti quinque effectus determinentur, constabit quomodo corpus a potentiis afficiatur; definitum enim erit primo, quanto corpus magis minusue aquae immergatur, deinde quanta vi ad motum progressiuum et in quanam directione vrgeatur; tertio et quarto cognoscetur, quantum corpus cum circa axem horizonalem longitudinalem inclinetur; ac quinto denique patebit, quanta vi corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertatur. Cum igitur in his quinque effectibus omnis potentiarum actio consistat, hoc caput finiemus, atque ad aquae resistentiam definiendam progrediemur, quippe qua opus est ad ipsum nauium motum determinandum.

Caput Quintum
DE
RESISTENTIA, QVAM FIGVRAE PLANAE IN AQVA MOTAE PATIVNTVR.

PROPOSITIO 49.
Problema.

465. *Si figura plana data celeritate in aqua directe moueatur, definire resistentiam seu motus diminutionem, quam patietur, dum datum spatium percurrit.*

Solutio.

Tab. XXII. fig. 1.

Figura plana in aqua directe moueri dicitur, quando eius directio ad ipsam superficiem planam est perpendicularis. Repraesentet igitur recta AB superficiem planam, cuius area sit $= aa$, in aqua motam in directione CO ad ipsam superficiem normali. Sit pondus seu massa corporis, quod hanc superficiem planam habet, quae in aquam AEFB incurrit $= M$, eiusque celeritas, qua in recta CO progreditur, et reipsa progredi pergeret, nisi resistentia adesset, debita altitudini v. Iam ad vim resistentiae definiendam concipiatur corpus momento temporis progredi, ita vt superficies plana AB perueniat in $\underline{a}\,\underline{b}$ absoluto spatiolo $Aa = Bb = dx$; sitque celeritas, quam peracto hoc spatiolo retinebit debita altitudini $v - dv$. Dum autem corpus per spatiolum Cc progreditur, a-

quam

quam ABba de loco ſuo pellet per conflictum, ita vt corpus interea colliſionem tranſigat cum mole aquea ABba, cuius volumen erit a^2dx, eiusque maſſa ſeu pondus propterea exprimatur per ma^2dx, denotante m aquae grauitatem ſpecificam. Incurrit igitur corpus M celeritate ſua $\sqrt{v}$ in molem aqueam ma^2dx quiescentem directe, ex quo perſpicuum eſt directionem vis, quam corpus in hoc conflictu ſentiet, fore normalem ad ſuperficiem in currentem AB, atque tranſituram eſſe per centrum grauitatis C ſuperficiei ipſius, eo quod in recta Cc ſimul centrum grauitatis molis aquae ABba ſitum erit; vrgebitur ergo corpus M in hoc conflictu vi quadam CP, cuius directio directe erit contraria directioni motus CO. Ad diminutionem motus igitur definiendam regulas communicationis motus in ſubſidium vocari oportet, et quidem eas, quae ad corpora perfecte mollia ſpectant, cum aquam hoc ſaltem caſu omni elaſticitate carere experimenta ſatis declarent. Cum itaque ante conflictum motus quantitas adſit $= M\sqrt{v}$; poſt conflictum vero, quoniam moles aquea ABba eadem celeritate mouebitur qua corpus M, debita ſcilicet altitudini $v-dv$, erit motus quantitas $(M+ma^2dx)\sqrt{(v-dv)} = (M+ma^2dx)(\sqrt{v} - \frac{dv}{2\sqrt{v}})$; has duas motus quantitates inter ſe aequales eſſe oportet, vnde oritur $\frac{Mdv}{2\sqrt{v}} = ma^2dx\sqrt{v}$, ſeu $Mdv = 2ma^2vdx$. Ponatur nunc potentia p tanta, vt corpus in directione CP ſollicitando, interea dum corpus per ſpatium $Cc = dx$ mouetur, eandem motus diminutionem producere poſſet, foret $dv = \frac{pdx}{M}$; ideoque $p = 2ma^2v$; ex quo perſpicitur aquae reſiſtentiam in ſuperficiem a^2 celeritate debita altitudini v directe motam aequi-

aequiualere ponderi voluminis aquae $2a^2v$; ſeu aequalem eſſe ponderi cylindri aquei, cuius baſis aequalis ſit ſuperficiei incurrenti in aquam a^2; altitudo vero adaequet duplam altitudinem celeritati corporis debitam. Idem ergo aqua per reſiſtentiam efficit, ac ſi corpus M ſollicitaretur a potentia tanta, quantam aſſignauimus in directione CP, ad ſuperficiem corporis in aquam directe impingentem normali, et per eius ipſius ſuperficiei centrum grauitatis C tranſeunte Q. E. I.

Coroll. 1.

466. Reducta igitur eſt reſiſtentia, quam corpus plana ſuperficie praeditum directe in aquam incurrens patitur, ad potentiam, cuius tum directio tum quantitas pondere expreſſa datur.

Coroll. 2.

767. Media igitur directio reſiſtentiae, quam ſuperficies plana in aqua directe mota patitur, eſt normalis ad ipſam ſuperficiem et per eius centrum grauitatis tranſit.

Coroll. 3.

468. Quantitas autem reſiſtentiae tenet rationem compoſitam ex ipſa ſuperficie et quadrato celeritatis; et hancobrem pro eadem ſuperficie reſiſtentiae ſunt in duplicata ratione celeritatum.

Coroll. 4.

469. Si aquae volumen pondere ipſius corporis M pondus adaequantis ponatur $= V$; erit $V : M = 2\,a^2v$ ad pondus cylindri aquei, cuius baſis eſt aa et altitudo $2v$: quo

quocirca resistentia, quam superficies plana a^2 celeritate altitudini v debita in aquam directe occurrens patitur, aequivalet ponderi $\frac{2Ma^2v}{V}$.

Coroll. 5.

470. Eandem ergo vim corpus quiescens sentiet, in cuius superficiem planam aqua celeritate altitudini v debita impingit, ideo quod effectus ex collisione corporum ortus tantum a celeritate respectiua pendet, quae vtroque casu est eadem.

Coroll. 6.

471. Haec ergo propositio aeque valet ad motum corporum in aqua quiescenti, ac in fluuiis determinandum, siquidem superficies resistentiam patiens fuerit plana, atque ea directe in aquam, vel aqua directe in ipsam impingat.

Scholion 1.

472. Multum etiamnum inter Auctores, qui de aquae resistentia scripserunt, disputatur, vtrum resistentia aequiualeat duplo cylindro aqueo, cuius basis aequalis sit superficiei resistentiam directe excipienti, et altitudo aequalis altitudini celeritati debitae, prout hic quidem inuenimus, an simplo tantum cylindro. Elicuimus hic autem duplum eiusmodi cylindri ad resistentiam aquae exprimendam, quia posuimus aquae particulas perfecte molles et omni elatere carentes, quod quidem experimenta suadent. At si aquae perfecta elasticitas tribuatur, vtique alia resistentiae ratio prodiret. Si enim regulae, quae in collisione corporum elasticorum locum habent, in subsidium vocentur, tum

 adeo

adeo quadruplum memorati cylindri prodiret, resistentiaque reperietur $= 4ma^2v$; Sed cum hac consideratione aquae maior celeritas communicetur, quam ipsum corpus retinet, aqua a corpore ita resilire deberet, vt vacuum inter corpus et aquam relinqueretur. Quod cum ob aquae pondus, quo eius partes inter se comprimantur euenire nequeat, regulae communicationis, quae corporibus elasticis sunt accommodatae, locum hic inuenire non poterunt; sed principium generale, quo illae regulae nituntur, et quod in conseruatione virium viuarum consistit, erit adhibendum. Ob aquae compressionem igitur vtique est statuendum, corpus M et aquam AB*ba* eandem acquirere celeritatem. Hoc vero posito, quia ante conflictum vis viua adest $= Mv$, post conflictum vero vis viua est $= (M + ma^2dx)(v - dv)$, his aequatis fiet $Mdv = ma^2vdx$; vnde potentia aequiualens resistentiae orietur = ponderi $\underline{m}\ \underline{a}^2\ \underline{v}$, hoc est cylindro aqueo basis a^2 et altitudini v. Quaecunque autem resistentiae ratio locum habeat, calculus manet idem, differt enim tantum coefficiente istius cylindri aquei, qui illo casu est 2 hoc vero 1. Quamobrem istam controuersiam non multum curabimus, cum, vteruis casus valeat, proportiones maneant eaedem, ad quas praecipue attendemus; vtroque enim casu directio resistentiae est normalis ad superficiem planam directe in aquam incurrentem, atque per ipsius superficiei centrum grauitatis transit, estque praeterea vtroque casu proportionalis areae superficiei et quadrato celeritatis coniunctim. Experimenta autem, quae circa resistentiam corporum in aqua motorum sunt instituta pro simplici cylidro pugnare videntur, id quod cum argumento ex conseruatione virium viuarum petito mirifice congruit. Facile etiam patet resistentiam minorem esse

eſſe debere, quam in ſolutione inuenimus; ibi enim, quia aqua poſt colliſionem corpus comitatur, impulſus ſequentes debiliores eſſe debent quam aſſumſimus.

Scholion 2.

473. Experimenta ſcilicet, quae Newtonus cum globis in aqua delapſis inſtituit, ſatis clare euincere videntur reſiſtentiam tantum per ſimplicem cylindrum aqueum, cuius altitudo ſcilicet aequetur ſimplici altitudini celeritatem generanti, eſſe exponendam. Praeterea vero quia aqua praeter hanc reſiſtentiam, quae ab alliſione proficiſcitur, aliam habet reſiſtentiam a tenacitate particularum oriundam, haud parum difficile eſt definire per experimenta, quanta ſit reſiſtentia a ſola alliſione orta. Quidquid igitur ſit, cum experimenta poſteriori hypotheſi, qua reſiſtentia per ſimplum cylindrum aqueum exponitur, ſatis ſint conſentanea, eam hypotheſin hic adoptabimus, et reſiſtentiam, quam ſuperficies plana in aquam directe impingens patitur, menſurabimus pondere cylindri aquei, cuius baſis aequetur areae ſuperficiei, altitudo vero ipſi altitudini celeritati debitae; ita in caſu coroll. 4 reſiſtentia aequalis erit ponenda ipſi $\frac{Ma^2v}{V}$. Eadem vero reſiſtentiae hypotheſis comfirmari poteſt ſequenti argumento non quidem apodictico. Sit vas ampliſſimum aqua repletum ACDB, cuius altitudo AC $= v$, pertuſum ſit hoc vas infra ad latus foramine DE cuius area ſit $= a^2$, effluet aqua per hoc foramen celeritate debita altitudini v, iam venae aquae effluentis Ed opponatur directe obex planus de ipſi foramini amplitudine aequalis, atque hic obex ab effluente aqua ean-

Tab. XXII. fig. 2.

 dem

dem vim ſuſtinebit, ac ſi ipſe celeritate altitudini $\underline{v}$ debita directe contra aquam quiescentem impingeret. Conſentaneum autem videtur, obicem in $\overline{d\,e}$ eandem preſſionem eſſe paſſurum, ac ſi in $\overline{DE}$ eſſet collocatus, hoc vero caſu obex omnino obturabit foramen effluxumque penitus impediet; nunc autem preſſionem patietur aequalem ponderi cylindri aquei, cuius baſis aequatur ipſi ſuperficiei obicis a^2, altitudo vero altitudini $AC = v$, ex quo ſequitur reſiſtentiam ſuperficiei planae in aqua directe motae aeſtimandam eſſe ex ſimplici cylindro aqueo, cuius altitudo altitudini celeritati debitae aequalis ſit. Experimenta etiam hoc ratiocinium ſatis confirmant, nam quanquam ſi obex maior adhibeatur, quam eſt foramen DE, reſiſtentia aquae maior ſentiatur, tamen hoc magnitudini obicis tribuendum videtur, quippe ad cuius latera aqua defluit, maioremque preſſionem exercet, quam ſi obex orificium tantum aequaret; quamobrem non dubitandum eſt quin obex ſuperficiem maiorem non habens quam eſt amplitudo foraminis, aſſignatam preſſionem ſit ſenſurus. Quoniam porro eadem hypotheſis confirmatur, ſi aquae elaſticitas, quae omnino adimi non poteſt, tribuatur, et praecipue, ſi conſeruatio virium vivarum ſtatuatur, cuius vſus vbique ſummus conſpicitur, eo minus dubitabimus eam ſolam recipere, eique totam reſiſtentiae doctrinam ſuperſtruere; idque eo magis, cum illi experimenta maxime faueant.

PRO-

PROPOSITIO 50.

474. *Si superficies plana in aqua oblique moueatur, determinare resistentiam, qua motus superficiei ab aqua retardabitur.* Tab. XXII. fig. 3.

Solutio.

Quia superficies plana oblique moueri dicitur, quando directio motus ad ipsam angulum constituit obliquum, repraesentet AB superficiem planam, cuius area sit $= a^2$; quae moueatur in aqua directione MC, quae cum plano superficiei AB angulum constituat ACM cuius sinus sit $= n$; posito sinu toto $= 1$; celeritas vero qua superficies mouetur debita sit altitudini $\underline{v}$. Concipiatur iam vt ante superficies AB in aqua promoueri per spatiolum $Cc = dx$, atque hoc absoluto peruenire in $a\,b$, interea conflictum habuerit necesse est cum mole aquea $ABba$, cuius volumen est $= na^2 dx$. Minor igitur aquae portio motui superficiei obstat, quam si directe in aqua moueretur, idque in ratione sinus anguli incidentiae ad sinum totum; et hancobrem ex hoc capite resistentia, quam pateretur in motu directo, diminuenda est in ratione sinus anguli incidentiae ACM ad sinum totum. Deinde quanquam superficies in singulas aquae particulas oblique impingit, tamen impulsus directio erit ad superficiem AB normalis, ita vt resistentia in superficiem AB vim exerat, cuius directio ad eam erit normalis CP, atque per ipsius superficiei centrum grauitatis C transibit. At quoniam omnes conflictus huius superficiei cum singulis aquae particulis sunt obliqui, minus erunt efficaces, quam si essent directi, idque in ratione sinus anguli incidentiae ACM ad sinum totum. Cum

 igitur

igitur in iſta impulſione obliqua reſiſtentia ob duplicem cauſam bis debeat diminui in ratione ſinus anguli incidentiae ad ſinum totum, ſe habebit reſiſtentia, dum ſuperficies AB in aqua oblique mouetur, ad reſiſtentiam, quam eadem ſperficies eadem celeritate directe mota pateretur, vt quadratum ſinus anguli incidentiae MCA ad quadratum ſinus totius hoc eſt vt a^2 ad 1. Quare cum vis reſiſtentiae in caſu motus recti ſit $= m a^2 v$, ſeu ponderi cylindri aquei, cuius baſis eſt $= a^2$ et altitudo aequalis altitudini debitae celeritati, erit vis reſiſtentiae pro praeſenti caſu $= n^2 m a^2 v$, hoc eſt ponderi cylindri aquei baſin habentis aequalem ipſi ſuperficiei et altitudinem aequalem altitudini celeritati debitae, multiplicato per quadratum ſinus anguli incidentiae MCA poſito ſinu toto $= 1$. Q. E. I.

Coroll. 1.

475. Reſiſtentia igitur, quam idem planum ſub diverſis angulis in aqua motum eadem celeritate patitur, eſt in duplicata ratione ſinus anguli quem planum cum directione motus conſtituit.

Coroll. 2.

476. Si igitur cognita fuerit vis reſiſtentiae, quam planum in aqua directe motum ſuffert, ſimul innoteſcet reſiſtentia, quam idem planum vtcunque oblique in aquam impingens patietur.

Coroll. 3.

477. In quacunque igitur directione ſuperficies plana in aqua moueatur, directio reſiſtentiae ſemper eſt eadem,

dem, eſt enim normalis ad planum ſuperficiei, atque per centrum grauitatis ipſius ſuperficiei tranſit.

Coroll. 4.

478. Reſiſtentia porro, quam idem planum ſub variis angulis diuerſisque celeritatibus in aqua motum patitur, eſt in ratione compoſita ex duplicata celeritatum, et duplicata ſinus anguli quo in aquam impingit.

Coroll. 5.

479. Reſiſtentiae autem, quas diuerſa plana in aqua mota ſufferunt, rationem tenent compoſitam ex ſimplici arearum, duplicata celeritatum et duplicata ſinuum angulorum, quibus in aquam incurrunt.

Scholion 1.

480 Inſeruiunt haec problemata inſtar baſis ad reſiſtentiam determinandam, quam corpora cuiuscunque figurae in aqua mota patiuntur. Pendet enim reſiſtentia a corporis ſuperficie anteriore qua in aquam incurrit, quippe quae ſola cum particulis aquae confligitur, pars autem corporis poſterior ab aqua nullam patitur reſiſtentiam, eo quod ea ad aquam non allidit. Quamquam enim etiam pars poſterior ab aqua affici videatur, dum aqua locum, quem corpus poſt ſe reliquit, occupans, in partem poſticam impetum facit ac motum accelerat, tamen iſte effectus vix eſt ſenſibilis, et hancobrem hic conſiderari non meretur; ad quod accedit, quod theoria aquae nondum ſit ad eum perfectionis gradum euecta, vt aquae

effectus

effectus in posticam corporis natantis partem definiri queat. Hac igitur consideratione praetermissa, si corporis aquae innatantis anterior superficies vel plana fuerit vel ex planis pluribus constet, ope duorum horum problematum resistentia absolute poterit definiri. Praeterea vero inseruiunt haec problemata ad resistentiam corporum quacunque superficie praeditorum assignandam; quomodocunque enim superficies fuerit comparata, ea more solito tanquam ex innumerabilibus planis composita considerari, atque ex regulis staticis resistentia totalis, quae ex resistentiis singulorum elementorum emergit, per integrationem definiri poterit, quo pacto tam directionem mediam omnium resistentiarum, quam ipsam potentiam aequiualentem determinare licebit.

Scholion 2.

481. Cum igitur nunc propositum sit resistentiam indagare, quam corpora quaecunque aquae innatantia perpetiuntur, quo tota ista tractatio commode et dilucide absoluatur, certum ordinem sequi oportebit. Primum igitur hoc capite figuras tantum planas aquae tum horizontaliter tum verticaliter innatantes considerabo, atque vim resistentiae eiusque directionem determinabo, inde enim ad ipsa corpora facilius transire licebit. Eas vero figuras, quas aquae horizontaliter innatare ponemus, axe seu diametro praeditas assumemus, quia naues, ad quas hic potissimum respicimus, plano diametrali, quod verticaliter per spinam transeat, gaudent, ex quo singulae sectiones horizontales diametro spinae nauis parallela erunt

prae-

praeditae. Hic autem in resistentia ingens oritur discrimen, vtrum eiusmodi superficies secundum diametri suae directionem in aqua moueatur, an oblique? si enim secundum directionem diametri moueatur, manifestum est mediam directionem resistentiae ob similem ex vtraque diametri parte effectum, esse in ipsa diametro positam, ita vt hoc casu tantum quantitas vis resistentiae inuestigari debeat: sin autem eiusmodi superficies non secundum diametri suae directionem in aqua progrediatur, tum seorsim tam mediam directionem, quam ipsam quantitatem resistentiae inueniri oportet, quae inuestigatio propterea plus habebit difficultatis. Deinceps in capite sequente simili modo in resistentia corporum ipsorum aquae innatantium inuestiganda versabimur; eiusmodi enim corpora tantum contemplabimur, quae praedita sint plano diametrali verticali, quo nauium conditio imprimis spectetur, in qua tractatione iterum praecipue ad directionem motus erit attendendum, vtrum is fiat secundum diametrum sectionis aquae, an ad diametrum oblique; priore enim casu media directio resistentiae sponte datur, posteriore vero haud exiguo labore demum est inuestiganda. In vtraque autem tractatione eiusmodi problemata afferemus, ex quibus pateat, quaenam nauium figura ratione resistentiae sit aptissima; quae tum ex minima resistentia tum ex idonea resistentiae directione desumentur. Antequam autem haec omnia euoluenda suscipiamus, hic locus maxime est idoneus ad effectum gubernaculi in naue circa axem verticalem conuertenda inquirendum; quoniam gubernaculum superficie plana solet esse praeditum, cuius ideo vis, quam contra aquam impingens patitur, ex ista propositione facile definiri potest.

PROPOSITIO 51.
Problema.

482. *Si nauis in directione quacunque progrediatur, atque gubernaculum ad datum angulum conuertatur, inuenire vim, quam gubernaculum habebit ad nauim circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendam.*

Tab. XXII. fig. 4.

Solutio.

Quoniam media directio vis aquae, in quam gubernaculum irruit, per centrum grauitatis superficiei planae gubernaculi transit, ad eamque est normalis, concipiatur sectio nauis horizontalis ARBm per gubernaculi AD centrum grauitatis C transiens. Manifestum autem est hic non totius gubernaculi, sed eius tantum partis, quae aquae est immersa centrum grauitatis sumi debere. Repraesentabit itaque in figura A puppim, B proram, AB spinam nauis, AD gubernaculum situm tenens naturalem: Sit autem G punctum axis verticalis nauis per eius centrum grauitatis ducti, in quo per planum horizontale ARBm transit; GM vero sit directio cursus seu motus nauis, ita vt angulus BGM denotet declinationem cursus nauis a cursu directo, qui secundum directionem spinae GB fieri censetur, gubernaculum vero inclinatum sit ad angulum DAd, ita vt situm Ad obtineat, quo secundum directionem $c\,m$ directioni cursus GM parallelam in aquam impingit: Sit nunc anguli BGM sinus $= m$; cosinus $= \mu$; anguli vero DAd sinus $= n$; cosinus $= v$, existente semper sinu toto $= 1$. Sit porro area vel superficies gubernaculi vim aquae excipiens $= a^2$; AC $=$ Ac $= b$; A

G $= f$;

$G = f$; celeritasque, qua nauis mouetur, debita sit altitudini v. Denique sit pondus nauis $= M$, volumen partis submersae nauis $= V$, et momentum inertiae nauis respectu axis verticalis $= Mk^2$. His praemissis erit Acm angulus sub quo gubernaculum Ad ad aquam allidit, qui cum sit $= DAd + BGM$, erit sinus eius $= mv + n\mu$; hinc igitur vis resistentiae, quam gubernaculum sentiet erit $= \frac{(mv + n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$. Cuius directio cr transibit per gubernaculi centrum grauitatis c, eritque ad Ad normalis. Momentum ergo huius vis ad nauem cira axem verticalem circumuertendam erit $= (mv + n\mu)^2 \frac{Ma^2 v}{V} \cdot Gr$ sin. Arc. Est vero ob angulum Acr rectum, sinus $Arc = v$; et $Ar = \frac{b}{v}$; vnde fit $Gr = f + \frac{b}{v}$. Quo circa momentum vis gubernaculi ad nauem circa G conuertendam erit $= \frac{(mv + n\mu)^2 Ma^2 v(b + vf)}{V}$. Quod diuisum per momentum inertiae nauis respectu axis verticalis MK^2, dabit vim gyratoriam nauis circa eundem axem verticalem $= \frac{(mv + n\mu)^2 (b + vf) a^2 v}{VK^2}$; cui vi acceleratio momentanea motus angularis, qui naui circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum imprimitur, est proportionalis. Q. E. I.

Coroll. 1.

483. Pro eadem ergo naui, quo maior fuerit expressio $(mv + n\mu)^2 (b + xf)$ eo maior erit effectus gubernaculi ad nauem conuertendam; ex quo angulus DAd definiri poterit, quo effectus gubernaculi sit maximus.

Coroll. 2.

484. Si igitur anguli DAd cofinus feu v ponatur $= x$, erit $n = \sqrt{(1 - xx)}$, atque formula $(mx + \mu \sqrt{(1 - xx)})^2 (b + fx)$ feu eius radix quadrata $(mx + \mu \sqrt{(1 - xx)}) \sqrt{(b + fx)}$ fiet maximum, cum x determinabitur ex hac aequatione: $2\left(m - \frac{\mu x}{\sqrt{(1-xx)}}\right)(b + fx) + f(m + \mu \sqrt{(1 - xx)}) = 0$, quae tranfit in hanc $m(2b + 3fx) \sqrt{(1 - xx)} = \mu(3fxx + 2bx - f)$.

Coroll. 3.

485. Si ergo nauis curfu directo progrediatur, vt angulus BGM euanefcat, erit $m = 0$, et $\mu = 1$, atque vis gyratoria $= \frac{n^2 a^2 v(b + vf)}{VK^2}$; maximum igitur gubernaculum praeftabit effectum, fi fuerit $3fxx + 2bx - f = 0$, hoc eft, fi fuerit anguli DAd cofinus $x = \frac{-b \pm \sqrt{(bb + 3ff)}}{3f}$.

Coroll. 4.

486. Si igitur b tam fuerit paruum, vt prae f euanefcat, erit anguli DAd, quo maximum effectum praeftat gubernaculum, cofinus $= \frac{1}{\sqrt{3}}$; hoc eft angulus DAd erit $54°, 44'$.

Coroll. 5.

487. Si nauis curfus a directo declinet angulo BGM, gubernaculum autem in fitu naturali AD relinquatur, praeftabit tamen gubernaculum effectum ad nauem conuertendam, cuius vis gyratoria erit $\frac{m^2 a^2 v(b + f)}{VK^2}$.

Coroll.

Coroll. 6.

488. Afficit autem praeterea vis gubernaculi ipſum nauis motum, quae mutatio reperietur, ſi vis reſiſtentiae $\frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$, concipiatur in directione parallela GR centro grauitatis applicata; retardabitur ſcilicet motus nauis in directione ſua a potentia $\frac{(mv+n\mu)^3 Ma^2 v}{V}$; at a ſemita rectilinea deturbabitur potentia $\frac{(\mu v - mn)(mv+n\mu)^2 Ma^2 v}{V}$.

Coroll. 7.

489. Habebit inſuper gubernaculum in ſitu A*d* conatum ſeſe circa A conuertendi ſecundum plagam *d*D, qui conatus exprimetur momento $= \frac{(mv+n\mu)^2 Ma^2 bv}{V}$; tanta igitur vis a gubernatore adhiberi debet ad gubernaculum in ſitu A*d* continendum.

Coroll. 8.

490. Si igitur nauis curſu obliquo feratur, vi adeo opus erit ad gubernaculum in ſitu naturali AD conſeruandum, quae vis exprimetur momento $\frac{Mn^2 a^2 bv}{V}$.

Coroll. 9.

491. Manifeſtum denique eſt omnes has vires a gubernaculo exertas ceteris paribus creſcere in duplicata ratione celeritatum, quibus nauis progrediatur.

Scholion.

492. In hac igitur propoſitione non ſolum definiuimus quanta vi gubernaculum nauem circa axem verti-

 tica-

ticalem per centrum grauitatis ductum circumagat, sed etiam quantum tam ipsius nauis celeritatem, quam cursus directionem afficiat, in corollariis determinauimus. Praeterea etiam vim assignauimus, quam nauclerus adhibere debet ad gubernaculum, in dato situ conseruandum tanta, scilicet haec naucleri vis requiritur, vt eius momentum respectu axis circa quem gubernaculum mobile existit, adaequet momentum inventum, quo gubernaculum ex situ A*d* versus AD tendit. Intelligitur vero etiam, nisi planum ARB*m* per nauis centrum grauitatis transeat, vim gubernaculi etiam se exerere ad nauem circa axem horizontalem tam longitudinalem quam latitudinalem inclinandam, quae inclinatio autem attendi vix meretur, cum sit exigua, atque tum solum eueniat, quando gubernaculum vsurpatur. Quamobrem misso gubernaculo ad ipsum propositum reuertamur, ac primo quidem, quantam resistentiam figurae planae aquae innatantes patiantur inuestigemus.

PROPOSITIO 52.
Problema.

Tab. XXIII. fig. 1.

493. *Innatet aquae figura plana* MAN *diametro* AP *praedita secundum directionem* AC *ipsius diametri* AP *data cum celeritate, inuenire resistentiam, quam haec figura ab aqua patietur.*

Solutio.

Primum perspicuum est, quia figura secundum directionem axis AC in aqua progreditur, ob vtrinque omnia similia mediam directionem resistentiae in ipsam diametrum AP incidere debere, ita vt tantum opus sit eius quan-

quantitatem determinare. Hancobrem ponatur celeritas, qua figura in aqua ſecundum directionem AC progreditur, debita altitudini $\underline{v}$ ac ducantur ad diametrum AP duae ordinatae orthogonales MPN, mpn, vtrinque aequalia et ſimilia curuae elementa Mm, Nn abſcindentia, quae elementa quantam reſiſtentiam excipiant eſt indagandum. Ponatur AP $= x$, PM $=$ PN $= y$ erit P$p = dx$, et M$m =$ N$n = \surd(dx^2 + dy^2) = ds$. Iam anguli, quo elementa Mm et Nn in aquam illidunt, ſinus eſt $= \frac{dy}{ds}$. Si autem elementa haec in aquam directe ſeu normaliter impingerent, foret vis reſiſtentiae $= vds$ hoc eſt ponderi cylindruli aquei baſis $\underline{ds}$ et altitudinis v. Praeſenti igitur caſu vis, quam vtrumque elementum patitur, erit $= \frac{vdy^2}{ds}$; cuius vtriusque vis directio eſt normalis ad ipſa elementa, ideoque in normales MR et NR incidet. Si nunc hae duae vires reſoluantur in binas, quarum alterae directiones habeant in applicatis, alterae parallelas axi AP, illae ſe mutuo deſtruent, hae vero conſpirabunt, habebuntque mediam directionem in AP incidentem. Quamobrem ob reſiſtentiam elementorum Mm, Nn, figurae in directione AP reſiſtetur vi $\frac{2vdy^3}{ds}$; ex quo tota curua MAN reſiſtentiam pariet $= 2\int\frac{vdy^3}{ds^2} = 2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$, ob $\underline{v}$ conſtantem, huiusque vis directio ſita erit in ipſa diametro AP. Q. E. I.

Coroll. 1.

494. Directio reſiſtentiae ergo, quam eiusmodi figura ſecundum diametrum AC in aqua promota ſentit, directe contraria erit directioni motus, et hancobrem motus tantum a reſiſtentia retartabitur, directio vero non af-

ficietur

ficietur, ſiquidem figurae centrum grauitatis in diametro AP fuerit ſitum.

Coroll. 2.

495. Reſiſtentia ergo ab A ad M et N progrediendo eousque creſcit, quoad fiat $dy = 0$, hoc eſt quoad curvae tangentes axi AP fiant parallelae. Quamobrem ſi curua fuerit indefinita, reſiſtentia ex iis tantum ramorum AM et AN portionibus aeſtimari debet, qui inter A et loca vbi eſt $dy = 0$ interiacent.

Coroll. 3.

496. Si ſola ordinata MPN in aqua directe, hoc eſt ſecundum directionem AP eadem celeritate moueretur, tum reſiſtentia quam ſentiret, foret $= 2vq$; ex quo reſiſtentia ordonatae MPN ſe habebit ad reſiſtentiam curvae MAN vt y ad $\int \frac{dy^3}{ds^2}$.

Coroll. 4.

497. Quoniam vbique eſt $dy < ds$, erit $\frac{dy^3}{ds^2} < dy$ ideoque $\int \frac{dy^3}{ds^2} < y$; quamobrem reſiſtentia, quam curua MAN patitur ſemper minor erit quam reſiſtentia, quam ſola ordinata MPN ſentiret.

Coroll. 5.

498. Eo minor ergo erit figurae MAN reſiſtentia, quo magis diſcrepat a recta transuerſali MPN; ſiue quo minus vbique eſt elementum applicatae dy reſpectu elementi curuae.

Co-

Coroll. 6.

499. Cum autem ſit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$, erit reſiſtentia, quam curuae portio MAN perpetitur $= 2vy - 2v\int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$. Exceſſus ergo reſiſtentiae ordinatae MN ſuper reſiſtentiam arcus MAN erit $= 2v \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$.

Coroll. 7.

500. Si ergo ſola figura MAN curua MAN in qua nusquam ſit $dy = 0$ et recta MN terminata eadem celeritate tum ſecundum directionem PC, tum ſecundum contrariam PR moueatur, erit reſiſtentia in priore caſu ad reſiſtentiam in poſteriore vt $y - \int\frac{dx^2 dy}{ds^2}$ ad y. Priore ſcilicet caſu curua MAN, poſteriore vero recta MN reſiſtentiae exponitur.

Scholion.

501. Quoniam formula, qua reſiſtentia arcus MAN exprimitur $2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$ generaliter integrari nequit, ipſa reſiſtentia quantitatibus finitis exhiberi non poteſt, ac manifeſtum eſt, reſiſtentiam a mutua poſitione ſingulorum elementorum pendere. Quamobrem expediet ad ſpecialiora deſcendere, atque datas curuas conſiderare, pro quibus valor ipſius $\int\frac{dy^3}{ds^2}$ aſſignari queat: ex his enim facilius colligi poterit, cuiusmodi curuae minorem maioremue reſiſtentiam patiantur. Hoc ſcilicet modo animus lectoris praeparabitur ad curuas, quae vel inter omnes, vel inter eas, quae certa quadam proprietate ſint praeditae, minimam patiantur reſiſtentiam, cognoſcendas; cuiusmodi curuas deinceps ſum inueſtigaturus.

Exemplum 1.

Tab. XXIII. fig. 2.

502. Sit figura ſeu eius ſaltem pars anterior EAF, quae reſiſtentiam ſentit, triangulum iſosceles, quod ſecundum directionem diametri AB cuspide A antrorſum verſa in aqua progrediatur celeritate debita altitudini v: incidet directio reſiſtentiae in rectam AB, eius vero quantitas ita ex generali ſolutione definietur. Poſitis $AB = a$; $BE = BF = b$, et vt ante $AP = x$; $PM = PN = y$; erit $a:b = x:y$, vnde fit $y = \frac{bx}{a}$; $dy = \frac{bdx}{a}$; et $ds = \frac{dx}{a}\sqrt{(a^2+b^2)}$. Ex his fient $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3dx}{a(a^2+b^2)}$, atque integrando $\int\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3x}{a(a^2+b^2)}$. quamobrem reſiſtentia, quam pars MAN patietur, erit $= \frac{2b^3xv}{a(a^2+b^2)}$ atque poſito $x = a$, habebitur reſiſtentia deſiderata, quam triangulum totum EAF ſuffert $= \frac{2b^3v}{a^2+b^2}$.

Coroll. 1.

503. Reſiſtentia ergo, quam ſentit angulus EAF erit ad reſiſtentiam baſis EF eadem celeritate et in eadem directione in aqua motae vt bb ad a^2+b^2, hoc eſt vt BE^2 ad AE^2.

Coroll. 2.

504. Perſpicuum igitur eſt reſiſtentiam trianguli EAF in aqua vertice A antrorſum verſo ſe habere ad reſiſtentiam, quam idem triangulum baſe EF antrorſum verſa patitur in duplicata ratione ſinus anguli BAE ad ſinum totum.

Coroll. 3

505. Quo minor igitur ſeu acutior fuerit angulus EAF

EAF manente basi EF eadem, eo minor erit resistentia, quam triangulum vertice A antrorsum verso in aqua sentiet.

Coroll. 4.

506. Figura plana igitur super eadem basi EF constituta, quae minimam patietur resistentiam, erit triangulum infinite magnum, cuius vertex A in infinitum abit: talis quippe trianguli resistentia est nulla.

Exemplum 2.

507. Sit curua MAN parabola, cuiusuis ordinis, siue continua, siue ex aequalibus eiusdem parabolae ramis AM et AN composita, quae celeritate altitudini v debita indirectione AC moueatur in aqua, ita vt sit $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$. Resistentiae directio, quam portio MAN patietur, incidet vtique in directionem diametri AP, quantitas vero ex aequatione $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$ ita definietur. Cum sit $dy = \frac{mx^{m-1}dx}{a^{m-1}}$, erit $ds^2 = dx^2(1 + \frac{m^2x^{2m-2}}{a^{2m-2}}) = \frac{dx^2(a^{2m-2} + m^2x^{2m-2})}{a^{2m-2}}$ atque $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{m^3x^{3m-3}dx}{a^{m-1}(a^{2m-2}+m^2x^{2m-2})}$ $= dy - \frac{ma^{m-1}x^{m-1}dx}{a^{2m-2}+m^2x^{2m-2}}$. Hinc igitur oritur $\int\frac{dy^3}{ds^2} =$

$$y - ma^{m-1}\int\frac{x^{m-1}dx}{a^{2m-2}+m^2x^{2m-2}} = y - \int\frac{a^{\frac{2m-2}{m}}dy}{a^{\frac{2m-2}{m}}+m^2y^{\frac{2m-2}{m}}}.$$

Tab. XXIII. fig. 1.

 quae

quae expreſſio ducta in $2v$ dabit quantitatem reſiſtentiae. Pro parabola ergo Appolloniana quae eſt $m = \frac{1}{2}$, erit reſiſtentia $= 2vy - 2v\int\frac{4yydy}{aa+4yy} = 2v\int\frac{aady}{aa+4yy} = av$ Arc.t. $\frac{2y}{a}$. Tota ergo parabola in infinitum continuata reſiſtentiam patitur finitam quae erit $= \frac{\pi}{2}av$, denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam. Pro reliquis vero caſibus non admodum concinnae formulae reperiuntur, quamobrem his miſſis ad alias curuas conſiderandas pergemus.

Exemplum 3.

Tab. XXIII. fig. 3.

508. Si curuae in aqua horizontaliter promotae ſecundum directionem CA pars anterior reſiſtentiam excipiens fuerit arcus circuli MAN, cuius radius AC ſit $= a$; reſiſtentiae directio ob partes vtrinque ſimiles cadet in diametrum AC. Poſitis autem $AP = x$ et $PM = PN = y$; erit $x = a - \sqrt{(a^2-y^2)}$ et $ds = \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ vnde fit $\frac{dy^3}{ds^2} = dy - \frac{y^2dy}{aa}$, atque $\int\frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{y^3}{3a^2}$. Reſiſtentia igitur quam patietur arcus MAN in directione AC erit $= 2v(y - \frac{y^3}{3aa})$. Si ergo pars figurae anterior fuerit ſemicirculus integer BAD, erit reſiſtentia quam patietur $\frac{4av}{3}$. Quamobrem ſi integra figura fuerit circulus ABED, in quamcunque plagam is in aqua promoueatur, ſemicirculus ſemper reſiſtentiae erit obnoxius, atque ob omnes partes ſimiles directio reſiſtentiae ſemicirculum anteriorem biſecabit et per centrum tranſibit, ipſaque reſiſtentia perpetuo erit $= \frac{4av}{3}$.

Corol.

Coroll. 1.

509. Resistentia ergo semicirculi BAD se habebit ad resistentiam diametri BD eadem celeritate directe motae vt $\frac{4av}{3}$ ab $2av$ hoc est vt $2:3$.

Coroll. 2.

510 Si autem concipiatur triangulum isosceles BAD eadem celeritate et in eadem directione aquae innatare; erit eius resistentia $= av$. Duplo igitur minor est resistentia trianguli BAD, quam resistentia diametri BD; atque semicirculi BAD trianguli BAD et diametri BD resistentiae se inter se habebunt vt isti numeri. $4:3:6$.

Coroll. 3.

511. Sin autem arcus indefinitus semicirculo minor MAN solus resistentiam patiatur, erit resistentia ipsius ad resistentiam chordae MN eadem celeritate contra aquam directe impingentis vt $y - \frac{y^3}{3aa}$ ad y seu vt $3aa - yy$ ad $3aa$.

Coroll. 4.

512. Si insuper triangulum isosceles MAN in eadem directione et eadem celeritate moueatur; erit eius resistentia $= \frac{y^3 v}{aa - a\sqrt{(aa-yy)}}$. Quamobrem segmenti MAN, trianguli MAN et chordae MN resistentiae erunt inter se vt $\frac{6aa-2yy}{3aa} : \frac{y^2}{a^2 - a\sqrt{(aa-yy)}}) : 2$. seu vt $6aa - 2yy : 3a^2 + 3a\sqrt{(aa-yy)} : 6aa$.

Coroll. 5.

513. Harum trium ergo resistentiarum maxima est, quam chorda MN patitur. Resistentia vero segmenti MAN aequalis fit resistentiae trianguli MAN, si sit $y = \frac{a\surd 3}{2}$, hoc est si arcus AM sit 60. graduum. Resistentiae igitur segmenti MAN erit maior quam resistentia trianguli MAN si arcus AM excedat 60 gradus; minor vero si arcus AM fuerit 60° minor.

Exemplum 4.

Tab. XXIII. fig. 4.

514. Sit nunc figurae planae aquae innatantis pars anterior arcus ellipticus MAN seu portio ellipsis ABED, cuius alter semiaxis $AC = a$; alter $BC = b$, erit positis $AP = x$; $PM = y$, $CP = a - x$, et $a^2 = (a-x)^2 + \frac{aayy}{bb}$, vnde fit $x = a - \frac{a}{b}\surd(bb - yy)$. Hinc igitur erit $dx = \frac{ay\,dy}{b\surd(b^2-y^2)}$ atque $ds^2 = \frac{dy^2(b^4+(a^2-b^2)yy)}{bb(bb-yy)}$, quamobrem habebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bbdy(bb-yy)}{b^4+(aa-bb)yy} = -\frac{bbdy}{aa-bb} + \frac{aab^4dy}{(aa-bb)(b^4+(aa-bb)yy)}$ Ad integrationem huius formulae absoluendam duo considerandi sunt casus, alter si $a > b$, altet si a $< b$. priore enim casu resistentia a quadratura circuli, posteriore a logarithmis pendebit: Moueatur igitur primum ellipsis vertex acutior A in directione axis maioris EA in aqua, erit

$$\int\frac{dy^3}{ds^2} = -\frac{bby}{aa-bb} + \frac{aabb}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}\,\text{A tang.}\,\frac{y\surd(aa-bb)}{bb};$$

ideoque resistentia quam arcus MAN patietur erit $= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{y\surd(aa-bb)}{bb} - \frac{2b^2vy}{aa-bb}$. Quare si integra semiellipsis BAD constituat partem figurae anteriorem, erit resistentia =

$= \frac{2a^2b^2v}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - \frac{2b^3v}{aa-bb}$. Sit autem nunc $a < b$ seu A ellipsis vertex obtusior, erit $\int\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{bby}{bb-aa} - \frac{aabb}{2(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$; hoc igitur casu resistentia arcus MAN prodibit $= \frac{2bbvy}{bb-aa} - \frac{aabbv}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}} l \frac{bb+y\sqrt{(bb-aa)}}{bb-y\sqrt{(bb-aa)}}$.

Sive autem b sit maius siue minus quam a per seriem infinitam erit $\int\frac{dy^3}{ds^2} = y - \frac{aay^3}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^5}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^7}{7b^{12}} + \frac{aa(aa-bb)^3y^9}{9b^{16}} - \frac{aa(aa-bb)^4y^{11}}{11b^{20}} +$ etc. vnde fit resistentia quam arcus MAN patietur $= 2vy(1 - \frac{aay^2}{3b^4} + \frac{aa(aa-bb)y^4}{5b^8} - \frac{aa(aa-bb)^2y^6}{7b^{12}} +$ etc.) Si igitur ellipsis tota medietas BAD resistentiam patiatur, erit resistentia $= 2bv(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(aa-bb)^2}{7b^6} + \frac{a^2(aa-bb)^3}{9b^8} -$ etc.)

Coroll. 1.

515. Si igitur eadem ellipsis tum secundum directionem axis EA, tum secundum directionem axis DB in aqua moueatur; erit resistentia in priori casu $= 2bv(1 - \frac{a^2}{3bb} + \frac{a^2(aa-bb)}{5b^4} - \frac{a^2(a^2-b^2)^2}{7b^6} +$ etc.), resistentia vero in posteriore $= c\,av(1 - \frac{bb}{3aa} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^4} - \frac{bb(aa-bb)^2}{7a^6} -$ etc.).

Coroll. 2.

516. Resistentia ergo ellipsis secundum axem maiorem EA progredientis se habet ad resistentiam eiusdem ellipsis

ellipſis ſecundum axem minorem DB eadem celeritate promotae vt $b - \frac{a^2}{3b} + \frac{a^2(a^2-b^2)}{5b^3} - \text{etc.}$ ad $a - \frac{bb}{3a} - \frac{bb(aa-bb)}{5a^3} - \text{etc.}$ vbi a eſt ſemiaxis maior, b vero ſemiaxis minor.

Coroll. 3.

517. Si ergo differentia axium ſit valde parua puta $a = b + d$ denotante d quantitatem vehementer paruam, erit reſiſtentia ſemiſſis ellipſis BAD ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE vt $\frac{2b}{3} - \frac{4d}{15} + \frac{2dd}{21b}$, ad $\frac{2b}{3} + \frac{14d}{15} + \frac{2dd}{21b}$ hoc eſt vt 1 ad $1 + \frac{9d}{5b} + \frac{18dd}{25bb}$; quae congruit maxime cum hac ratione 1 ad $(1 + \frac{d}{b})^{\frac{9}{5}}$ ſeu $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Coroll. 4.

518. Vera autem ratio, quam reſiſtentia ſemiſſis BAD tenet ad reſiſtentiam ſemiſſis ABE eſt vt $2a^2b^2 \text{ A tang. } \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b} - 2b^3\sqrt{(aa-bb)}$ ad $2a^3\sqrt{(aa-bb)} - a^2b^2 l \frac{a + \sqrt{(aa-bb)}}{a - \sqrt{(aa-bb)}}$ quae igitur ratio, ſiquidem b ab a non multum diſcrepet, proxime accedet ad hanc $b^{\frac{9}{5}} : a^{\frac{9}{5}}$.

Exemplum 5.

Tab. XXIII. fig. 5.

519. Sit figura aquae in directione CA innatans compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ABE et ADE, erit poſitis $AC = a$ $BC = CD = b$, radius circuli, cuius ſegmenta ſunt ſumta $= \frac{aa + bb}{2b}$. Quare poſitis $AP = x$, $PM = PN = y$ habebitur $x = a - \sqrt{(a^2 - \frac{(a^2-b^2)}{b}y - yy)}$ atque $dx = \frac{(aa-bb)dy + 2bydy}{2\sqrt{(a^2b^2 - (a^2-b^2)by - bbyy)}}$; vnde erit $ds^2 = \frac{(a^2+b^2)^2dy^2}{4a^2b^2 - 4(a^2-b^2)by - 4bbyy}$. Quamobrem obtinebitur $\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{4a^2b^2dy - 4(a^2-b^2)bydy - 4bbyydy}{(a^2+b_2)^2}$,

hincque

hincque $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{4a^2b^2y - 2(a^2-b^2)byy - \frac{4}{3}bby^3}{(a^2+b^2)^2}$; quae expressio ducta in $2v$ dabit resistentiam, quam portio MAN patitur. Quocirca si ponatur $y = b$ proueniet resistentia, quam integra pars anterior BAD sufferet $= \frac{4b^3v(3a^2+b^2)}{3(a^2+b^2)^2}$ Resistentia autem, quam sentiet eadem figura, si in directione CB eadem celeritate moueatur, erit ex exemplo 3. $= \frac{2av(3a^4+2a^2b^2+3b^4)}{3(a^2+b^2)^2}$.

Coroll. 1.

520. Resistentia quam patitur recta BD in directione CA mota, est $= 2bv = \frac{6bv(a^2+b^2)^2}{3(a^2+b^2)^2}$; vnde erit resistentia figurae BAD in directione CA motae ad resistentiam rectae BD in eadem directione motae vt $6aabb + 2b^4$ ad $3a^4 + 6aabb + 3b^4$ vnde resistentia rectae BD multo maior est quam resistentia figurae BAD.

Coroll. 2.

521. Resistentia autem, quam patietur figura ABED mota secundum directionem CA se habebit ad resistentiam eiusdem figurae motae eadem celeritate in directione DB vt $6a^2b^3 + 2b^5$ ad $3a^5 + 2a^3b^2 + 3ab^4$; si ergo $a > b$ resistentia prior semper est minor quam posterior.

Scholion.

522. His consideratis satis intelligitur nullam dari figuram finitam, quae minimam patiatur resistentiam inter omnes alias iisdem terminis contentas. Quaecunque

 enim

enim aſſignetur figura minimam patiens reſiſtentiam, ſtatim alia exhiberi poſſet, quae minorem reſiſtentiam ſentiret, tantum datam curuam vel eius tantum portionem verſus eam regionem in quam fit motus elongando. Hanc obrem nequidem quaeſtio foret inſtar ptoblematis proponere inueniendam figuram planam, quae in aqua horizontaliter promota minimam ſentiret reſiſtentiam; ipſa enim ſolutio nullum dari minimum in finitis declararet. Quo autem appareat, quaenam figurae finitae reliquis ratione reſiſtentiae ſint praeferendae ad alias conditiones ſimul eſt attendendum, quibus curua quaeſita cogatur eſſe finita. Eiusmodi autem quaeſtiones formari poſſunt, vt vel inter omnes figuras eandem aream habentes, vel inter omnes eadem perimetro cinctas ea determinetur, quae ſecundum datam directionem in aqua mota minimam patiatur reſiſtentiam. Ad ſoluendas vero iſtius modi quaeſtiones conueniet lemma ſequens praemittere, quo methodus omnia huius generis problemata ſoluendi continetur.

LEMMA.

523. *Inuenire curuam, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, vel inter omnes omnino curuas, vel inter eas tantum, quae vna quadam ſiue pluribus proprietatibus aequaliter ſint praeditae.*

Solutio.

Tam ea proprietas, quae in curua quaeſita maxima minimaue eſſe debet, quam eae proprietates, quae in curuas, e quibus electio eſt facienda, formulis integralibus indefinitis exprimentur; ex iisque formulis nullo discrimine habito, quaenam proprietatem maximam minimamue

mamue contineat, aut proprietates communes, natura curvae quaesitae sequenti modo definietur. Singulae formulae integrales propositae ad ordinatas orthogonales x et y reducantur, vt in illis aliae quantitates non insint praeter x et y, cum ipsorum differentalibus tam primi quam altiorum graduum. Posito autem dx constante fiat $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$; etc. quibus substitutionibus quaeque formula proposita integralis reducetur ad huiusmodi formam, $\int Zdx$, in qua Z erit quantitas composita ex finitis quantitatibus x, y, p, q, r, etc. Quare si ista quantitas Z differentietur, eius differentiale talem habebit formam, vt sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr +$ etc. Ex hoc differentiali formetur sequens quantitas $V = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. atque eiusmodi valores V eliciantur ex singulis formulis integralibus propositis, quae vel maximum minimumue esse, vel omnibus curuis ex quibus quaesita est definienda, communes esse debent. Hi denique singuli valores V inuenti multiplicentur per constantes quantitates quascunque respectiue, eorumque productorum summa ponatur $= 0$, quae aequatio naturam curvae quaesitae exprimet. Hoc igitur facto restituantur loco p, q, r, etc. assumti valores scilicet $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{ddy}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ etc. vt obtineatur aequatio pro curua quaesita solas binas variabiles x et y continens cum suis differentialibus, in qua sit dx constans Q. E. I.

Coroll. 1.

524. Si igitur area curuae $\int ydx$ vel maxima minimaue esse debeat, vel omnes curuae, ex quibus quae-

 sita

ſita eſt definienda eiusdem areae ponuntur, erit $Z = y$, et $dZ = dy$, vnde formulae $\int y\,dx$ valor ipſi V reſpondens erit $= 1$.

Coroll. 2.

525. Si vel curua maximae minimaeue longitudinis deſideretur, vel omnes curuae, ex quibus quaeſita debet inueniri eiusdem longitudinis ponantur, exprimetur iſta proprietas hac formula $\int \surd(dx^2 + dy^2)$ quae ope ſubſtitutionis reducitur ad hanc $\int dx \surd(1+pp)$ erit ergo $Z = \surd(1+pp)$ et $dZ = \frac{p\,dp}{\surd(1+pp)}$; vnde erit $N = 0$, $P = \frac{p}{\surd(1+pp)}$; $Q = 0$, etc. ideoque valor ipſius V formulae $\int dx \surd(1+pp)$ reſpondens erit $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}dx}$.

Coroll. 3.

526. Si eiusmodi curua quaeratur, quae aquae horizontaliter innatans ſecundum directionem axis, in quo abſciſſae x capiuntur, minimam pati debeat reſiſtentiam, tum iſta formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$ minimam eſſe oportebit, haec vero formula ob $dy = p\,dx$, et $ds^2 = dx^2(1+pp)$ abit in hanc $\int \frac{p^3\,dx}{1+pp}$. Cum igitur ſit $Z = \frac{p^3}{1+pp}$ erit $N = 0$, $P = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$ atque valor ipſius V reſpondens erit $= -\frac{dP}{dx}$.

Coroll. 4.

527. Si igitur inter omnes omnino curuas ea deſideretur, quae maximam minimamue reſiſtentiam patiatur, vnica habebitur formula $\int \frac{dy^3}{ds^2}$, cuius propterea valor ipſius V reſpondens debet eſſe $= 0$. Habebitur ergo $dP = 0$, et $P =$

et $P = \frac{3pp + p^4}{(1+pp)^2} = m$ qua aequatione natura lineae quaesitae exprimetur.

Coroll. 5.

528. Cum igitur ex hac aequatione fiat p constans, sit $p = k$ erit $dy = kdx$; et $y = kx + c$ vnde fiet $k = \frac{y - c}{x} = p$. Qui valor in aequatione inuenta substitutus dabit aequationem algebraicam inter x et y hanc $(y - c)^4 + 3xx(y - c)^2 = m(x^2 + (y^2 - c^2)^2$, quae quidem est pro linea recta seu pluribus rectis connexis.

Coroll. 6.

529. Quo posito $x = 0$ fiat simul $y = 0$, debebit esse vel $c = 0$ vel $m = 1$. At si sit $m = 1$ fiet $p = 1$ et $y = x$. sin autem ponatur $c = 0$ habebitur $y^4 + 3x^2y^2 = m(x^2 + y^2)^2$, hincque $y = \frac{\pm x\sqrt{2m}}{\sqrt{(3 - 2m \pm \sqrt{(9 - 8m)})}}$, quae aequatio quatuor lineas rectas complectitur.

Scholion.

530. Lemma hoc latissime patet, cum non solum iis problematis, quibus ex omnibus omnino curuis vna, quae maximi minimiue proprietate quapiam gaudeat, desideratur, resoluendis inseruiat; sed etiam ad ea problemata sit accommodatum, quibus non ex omnibus curuis possibilibus, sed ex iis tantum, quae vna pluribusue quibuscunque proprietatibus aequaliter sint praeditae vna maximi minimiue proprietate gaudens desideratut. Multo amplior igitur extat huius lemmatis vsus, quam problematis Isoperimetrici, prout id quidem ad huc est tractatum, quo methodus traditur ex omnibus curuis vel eius-

 dem

dem longitudinis vel aliam quandam proprietatem aequaliter poſſidentibus eam definiendi, quae aliqua maximi minimiue proprietate gaudeat. Nam praeterquam quod methodus haec vſitata vnicam tantum ſpectat proprietatem, quae in omnes curuas competat, ea quoque ratione ipſarum formularum integralium quae vel maximae minimaeue vel omnibus curuis communes eſſe debent, ingenti reſtrictioni eſt obnoxia; ceſſat enim eius vſus, ſtatim atque in alteram ſiue in vtramque formulam integralem differentialia ſecundi altiorisue cuiusdam gradus ingrediuntur, dum methodus hoc lemmate tradita ad cuiusuis gradus differentialia extenditur. At ſi ipſe curuae arcus vel aliae formulae integrales in ipſa quantitate Z contineantur, lemma allatum nullum amplius praeſtat vſum, ſed cum alia methodo coniungi debet, quam, quia eius vſus in ſequentibus non occurit, hic praetermiſimus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

531. *Inter omnes curuas* AM *cum axe* AP *et applicata* PM *eandem aream comprehendentes inuenire eam* AM, *quae circa axem* AP *vtrinque diſpoſita formet figuram* AMN *in aqua minimam maximamue patientem reſiſtentiam, ſi quidem in directione diametri* PA *progrediatur.*

Tab. XXIII. fig. 1.

Solutio.

Poſitis abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$, quaeſtio huc redit, vt inter omnes curuas, in quibus $\int y\,dx$ eundem obtinet valorem, ea determinetur in qua $\int \frac{dy^3}{ds^2}$

ſeu

seu $\int \frac{p^3 dx}{1+pp}$ posito $dy = p dx$, sit maximum vel minimum. Priori igitur formulae $\int y dx$ respondet hic valor $V = 1$; posteriori vero $\int \frac{p^3 dx}{1+pp}$ est $V = -\frac{dP}{dx}$ existente $P = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$ et $\int P dp = \frac{p^3}{1+pp}$. Pro curua ergo quaesita obtinebitur ista aequatio $dP = \frac{dx}{a}$ atque $P = \frac{x+b}{a} = \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$. At ex eadem aequatione differentiali per p multiplicata $pdP = \frac{pdx}{a} = \frac{dy}{a}$ oritur integrando $Pp - \frac{p^3}{1+pp} = \frac{y+c}{a} = \frac{2p^3}{(1+pp)^2}$, vnde fiet $x = \frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2} - b$ et $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2} - c$ ex quibus formulis curua quaesita non dificulter construitur. Erit autem area $\int y dx = \frac{a^2 P^2 p}{2} - \frac{a^2 P p^3}{1+pp} + \frac{a^2 p^5}{2(1+pp)^2} - cx + 2a^2 \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4} = \frac{2a^2 p^5}{(1+pp)^4} + 2a^2 \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4} - cx$; resistentia vero est seu $\int \frac{dy^3}{ds^2} = \frac{aPp^3}{1+pp} - a\int P^2 dp = \frac{2ap^5}{(1+pp)^3} - 4a \int \frac{p^4 dp}{(1+pp)^4}$; His autem aequationibus tam ea curua, quae maximam, quam quae minimam patitur resistentiam continetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

532. Si ponatur $b = 0$ et $c = 0$, curua manebit eadem; alius enim tantum axis priori parallelus accipitur, aliudque initium abscissarum. Pro hoc itaque axi si sumatur abscissa $x = \frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2}$, erit applicata $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$.

Coroll. 2.

533. Si ergo sumatur $p = 0$, tum fiet tam $x = 0$ quam $y = 0$; in initio igitur abscissarum incidet curua in axem, atque ob $\frac{dy}{dx} = 0$, curua hoc loco ab axe tangetur.

Co-

Coroll. 3.

534. Si ponatur $p = \infty$, fiet $x = a$ et $y = a$ hancobrem eo loco vbi eſt $x = a$, curua iterum in axem incidet, hic vero tangens curuae erit normalis ad axem.

Coroll. 4.

535. Deinde perſpicuum eſt tam abſciſſam quam applicatam vsque ad certos tandem terminos crescere poſſe; obtinebit enim tam x quam y maximum valorem ponendo $p = \sqrt{3}$, hocque caſu fit $x = \frac{9}{8} a$ et $y = \frac{3\sqrt{3}}{8} a$.

Coroll. 5.

536. Denique ſiue p affirmatiuum ſiue negatiuum habeat valorem, abſciſſa x manet eadem, at y negatiuum obtinet valorem ſumto p negatiuo, ex quo intelligitur axem in quo abſciſſae x capiuntur, ſimul eſſe diametrum curuae inuentae.

Scholion. 1.

Tab. XXIV. fig. 1.

537. Cum ſumto $x = \frac{3ap^2 + ap^4}{(1+pp)^2}$ ſit $y = \frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$, curua erit algebraica, atque per infinita puncta deſcriptu facilis. Sumatur enim axis AC directioni, ſecundum quam figura in aqua mouetur parallelus, atque conſtructio inuenta praebebit curuam triangularem AMBCDNA tres habentem cuspides A, B, D ad angulos trianguli aequilateri ABD diſpoſitas, ac tres portiones inter cuspides comprehenſae, AMB, AND et BCD erunt inter ſe aequales et ſimiles. Erit autem AC $= a$; AE $= \frac{9}{8} a$; et BE $=$ DE $= \frac{3\sqrt{3}}{8} a$ tangentes vero in B et D cum recta BD conſtituant angulum 30 graduum. Cum igitur haec curua ſecun-

ſecundum directionem axis AC mota inter omnes alias eiusdem capacitatis tam maximam quam minimam, in aqua patiatur reſiſtentiam, intelligere licet portionem BM AND minimam eſſe paſſuram reſiſtentiam aream vero B CD maximam. Quare ſi curua deſideretur, quae inter omnes eandem aream continentes minimam patiatur reſiſtentiam; pro ea vel arcus AMB ſeu AND vel portio quaecunque erit accipienda. Pro nauibus autem commodiſſimum erit vtrique ſemiſſi partis anterioris accipere figuram DNAG ſeu BMAF ita vt D cadat in proram, et recta LG in ſpinam nauis; ſi enim figura DNA ad vtramque partem axis DG diſponatur habebitur figura quae in aqua ſecundum directionem GD inter omnes alias eandem aream DNAG continentes, et per puncta D et A tranſeuntes minimam patietur reſiſtentiam; atque haec eadem curua inter omnes alias per A et D ductas et eandem reſiſtentiam patientes maximam habebit aream DNAG. Quo autem natura, huius curuae nauibus maxime accommodata reſpectu axis DG inſpiciatur, ſit DR $=t$; NR $=u$; atque cum ſit $t=\frac{9}{8}a-x$ et $u=\frac{3\sqrt{3}}{8}a-y$, erit DR $=t=\frac{(3-pp)^2a}{8(1+pp)^2}$, atque NR $=u=\frac{(p-\sqrt{3})^2(3p^2\sqrt{3}+2p+\sqrt{3})a}{8(1+pp)^2}$. Poteſt vero etiam aequatio prima non incongrue conſeruari, qua eſt AP $=$ GR $=x=\frac{3app+ap^4}{(1+pp)^2}$, et PN $=y=\frac{2ap^3}{(1+pp)^2}$; ex qua erit $dx=\frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^3}$ $dy=\frac{2appdp(3-pp)}{(1+pp)^3}$; atque $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=ds=\frac{2apdp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$; vnde fiet ipſe arcus AN $=s=\frac{2a(3pp-1)}{3(1+pp)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2a}{3}$, ita vt curua inuenta ſit rectificabilis; Reſiſtentia

 autem

autem quam patietur pars AN erit vt $\int\frac{dy^5}{ds^2} = \frac{\frac{1}{2}ap + \frac{7}{6}ap^3 + 2ap^5}{(1+pp)^3} - a\int\frac{dp}{1+pp}$. Pofito igitur $p = \sqrt{3}$ proveniet tota curua AND $= \frac{4}{3}a$; eius vero fubtenfa AD $= \frac{3\sqrt{3}}{4}a$; vnde arcus AND fe habebit ad fubtenfam AD vt 16 ad $9\sqrt{3}$, Refiftentia vero quam patietur tota curua DNA erit vt $\frac{11\sqrt{3}}{32} - \frac{\pi a}{6}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eft 1. Refiftentia curuae ergo fe habet ad refiftentiam chordae AD vt 4 : 9 proxime. Haec curua AND praeterea in A habet tangentem axi GD parallelam, atque D curua cum axe facit angulum 60. graduum; in A et D vero radius ofculi eft infinite paruus. Quomodo autem fe haec curua AND refpectu fubtenfae AD habeat; ex parte BCD facilius perfpicitur vbi eft CE $= \frac{3}{8}a$ BE $=$ DE $= \frac{3\sqrt{3}}{8}a$, atque radius ofculi in puncto medio C eft $= 2a$; vnde conftructio practica facile concinnatur.

Coroll. 9.

538. Si igitur parti nauis anteriori tribuatur figura AND, exiftente D prora et DG fpina, nauis in directione GD progrediens non folum minimam patietur refiftentiam fed infuper fi ita moueatur, vt chorda AD ad curfus directionem fiat normalis, tunc maximam patietur refiftentiam; quia curua AND congruit cum BCD.

Coroll. 7.

539 Hoc igitur ipfo haec figura fe commendat ad nauibus optimam formam tribuendam; nam non folum requiritur vt nauis in directione fpinae progrediens minimam

offendat

offendat reſiſtentiam, ſed etiam vt in curſu obliquo reſiſtentia fiat vehementer magna.

Coroll. 8.

540. Reſiſtentia vero quam ſentiet figura AND ſi in directione ad chordam AD normali in aqua moueatur, erit ad hanc chordam normalis atque $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi\alpha}{6}$. Si vero figura ſecundum directionem GD moueatur, atque ex vtraque parte axis D G ſui ſit ſimilis erit reſiſtentia $= \frac{11a\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi\alpha}{2}$

Coroll. 9.

541. Si ergo partis anterioris nauis aquae ſubmerſae ſingulae ſectiones horizontales habuerint eiusmodi figuram, vt earum ſemiſſes omnes aequales ſint vel ſimiles figurae DNA, tum nauis aptiſſimam habebit ſiguram ad aquae reſiſtentiam ſuperandam, atque ſimul comprehendet maximum ſpatium, cuius ratio in nauibus praecipue eſt habenda.

Scholion 2.

542. Quae autem hic ſunt allata proprie tantum ad figuras planas aquae horizontaliter innatantes extenduntur, neque ad corpora ſolida, ac naues niſi cum ſumma cautione poſſunt accommodari. Ita figura plana minimam patiens reſiſtentiam inter omnes aquicapaces, quae hic eſt inuenta in ſolidis locum non inuenit niſi omnes corporis natantis ſectiones horizontales ſint inter ſe aequales; et hancobrem ſi haec per experimenta confirmare lubuerit, aſſeres vbique eiusdem craſſitudinis adhibere conuenit, qui eandem reſiſtentiae legem tenebunt ac figurae planae ſeu craſſitiei euaneſcentis; hoc ſcilicet caſu latera aſſerum re-

 ſiſtentiam

ſiſtentiam excipientia ſitum tenent verticalem, ideoque ſub iisdem angulis in aquae particulas incurrunt, ſub quibus quaelibet ſectiones horizontales. At ſi figura ſubmerſa obliquum teneat ſitum ad aquam, ſeu ſi latera reſiſtentia aquae oppoſita non fuerint verticalia ſed ad horizontem inclinata, tum angulus incidentiae differt, ab illo angulo, ſub quo ſola ſectio horizontalis aquae occurrit; et hancobrem in eiusmodi corporibus, quamuis reſiſtentiae, quas ſingulae ſectiones horizontales ſentiunt, ſint cognitae, tamen reſiſtentia totalis exinde definiri nequit. Quo circa ne ex hic traditis vitioſae deriuentur conclusiones pro reſiſtentia corporum, conſultum eſt iudicium ſuſpendere: quoad in ſequentibus reſiſtentiam, quam quaecunque corpora in aqua perpetiuntur, ſimus determinaturi.

PROPOSITIO 54.

Problema.

Tab. XXV. fig. 1.

543. *Si figura quaecunque plana* BCA *ſitu verticali in aqua ſecundum directionem horizontalem* MD *promoueatur data cum celeritate, determinare reſiſtentiae, quam offendet tam quantitatem quam directionem mediam*

Solutio.

Sumatur verticalis AC pro axe, in quo ſit abſciſſa CP $= x =$ MQ, applicata PM $= y =$ CQ; atque arcus AM $= s$; erit ſinus anguli, quo curuae AMB punctum M in aquam incurrit $= \frac{dx}{ds}$, ex quo reſiſtentiae, quam elementum ds patietur, vis erit $= \frac{v\,dx^2}{ds}$, denotante v altitudinem celeritati qua figura promouetur, debitam, cuius

vis

vis directio erit MN normalis ad curuam in M. Resoluatur nunc haec vis in binas laterales, quarum alterius directio sit horizontalis MP, alterius verticalis MQ, eritque vis horizontalis MP $= -\frac{vdx^3}{ds^2}$, et vis verticalis MQ $= + \frac{vdx^2dy}{ds^2}$. Hinc erit summa omnium virium horizontalium quas arcus AM patitur $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$, et summa virium verticalium $= +v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$; ita sumtis his intregralibus vt euanescant facto s vel $y = 0$. Quare si ponatur $x = 0$, tum prodibunt vires quas tota curua AMB ab aqua patitur. Sit autem vis totalis horizontalis $-v\int\frac{dx^3}{ds^2}$ directio OH, vis totalis vero verticalis $+v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ directio OI, erit sumendis momentis respectu puncti C, $-\text{CH}.v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -v\int\frac{xdx^3}{ds^2}$; atque $\text{CI}.v\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = v\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}$. Hinc igitur obtinetur $\text{CH} = \frac{\int xdx^3:ds^2}{\int dx^3:ds^2}$ et $\text{CI} = \frac{\int ydx^2dy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$; omnibus integralibus ita sumtis vt euanescant posito s seu $y = 0$ tumque facto $x = 0$. Effectus igitur resistentiae totalis in hoc consistit, vt figura retro vrgeatur in directione horizontali OH a vi $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2}$; simulque sursum vrgeatur in directione OI a vi $= v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$. Media ergo directio totius resistentiae cadet in OK existente IK : OI $= -\int\frac{dx^3}{ds^2} : \int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, vnde erit $\text{IK} = \frac{-\text{OI}\int dx^3:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2} = \frac{-\int xdx^3:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$; ideoque $\text{CK} = \frac{\int(xdx+ydy)dx^2:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$. Anguli vero OKB tangens erit $= \frac{\int dx^2dy:ds^2}{-\int dx^3:ds^2}$, ex quibus positio mediae directionis resistentiae OK cognoscitur. Ipsa vero resistentiae vis erit $= v\sqrt{((\int\frac{dx^3}{ds^2})^2 + (\int\frac{dx^2dy}{ds^2})^2)}$. Q. E. I.

 Co-

Coroll. 1.

544. Duplicem igitur resistentia in figuram BCA exerit effectum, quorum alter consistit in motu figurae retardando, atque oritur a vi horizontali $-v\int\frac{dx^3}{ds^2}$, cuius directio est OH.

Coroll. 2.

545. Altera autem vis ex resistentia orta $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, cuius directio est verticalis secundum OI motum figurae non afficit, sed eam ex aqua eleuat et quasi leuiorem facit.

Coroll. 3.

546. Nisi igitur vis verticalis $v\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ euanescat vel negatiua fiat, figura dum mouetur ex aqua magis emerget, perinde ac si leuior esset facta; eoque magis eleuabitur ex aqua, quo celerius in aqua progreditur; decrementum scilicet grauitatis est vt quadratum celeritatis.

Coroll. 4.

547. Nisi autem vbique sit vel $dy = 0$, quod euenit quando linea BMA abit in rectam verticalem, vel vsquam fiat dy negatiuum, vis ista verticalis figuram ex aqua eleuans semper tenebit valorem affirmatiuum.

Coroll. 5.

548. Deinde haec vis verticalis, quia eius directio in proram cadit, figuram etiam ita inclinabit, vt prora eleuetur; puppis vero deprimatur, nisi vis horizontalis OH profundius sit sita quam centrum grauitatis, ideoque inclinationem contrariam efficiat.

Co-

Coroll. 6.

549. Vis autem horizontalis OH, qua motus figurae retardatur, eo erit minor, quo magis figura versus B fuerit cuspidata. Atque si inter omnes figuras eandem aream BAC comprehendentes ea quaeratur, quae ab aqua quam minime retardetur, ea ipsa reperietur figura, quae in prop. praecedente est inuenta. Perinde enim se habet resistentia siue figura BMA horizontali situ promoueatur siue verticali.

Coroll. 7.

550. Maxime autem figura ex aqua eleuabitur, seu vis verticalis OI erit maxima, si linea curua BMA abeat in rectam, quae angulum cum horizontali BC constituat 54°, 44′ seu cuius cosinus est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Scholion 1.

551. Haec propositio potissimum inseruit ad resistentiam definiendam, quam spina nauis in aqua progredientis perpetitur, ex ea enim intelligitur non solum quantum motus nauis a spinae resistentia retardetur, sed etiam quantum ipsa nauis a resistentia aquae eleuetur et quasi leuior reddatur. Si autem praeterea corpus in aqua motum ita fuerit comparatum, vt omnes sectiones verticales in directione motus factae sint inter se similes et aequales, tum ex hac propositione quoque resistentia colligi potest, ita si cylindrus aquae horizontaliter incubans ita moueatur, vt eius axis ad directionem motus sit normalis tum curva AMB erit arcus circuli, atque hinc resistentia innotescet. Deinde vero eadem haec propositio magnam habe-

bebit vtilitatem in ſequentibus, vbi ſumus inueſtigaturi, quantam reſiſtentiam figura plana horizontalis quae in aqua ſecundum directionem obliquam progreditur, patiatur, hoc enim caſu reſiſtentia vtriusque ſemiſſis figurae ſeorſim eſt inueſtiganda, et ex vtraque media directio totius reſiſtentiae concludenda. Noſtro enim caſu perinde ſe habet reſiſtentia ſiue figura BMAC in ſitu verticali ſiue horizontali in aqua progrediatur.

Exemplum I.

Tab. XXV. fig. 2.

552. Sit figura plana triangulum BAC quod in aqua ſecundum directionem MD progrediatur celeritate altitudini v debita; cuius reſiſtentia quamquam facile ex prop. 50 determinatur, tamen eam ope formularum hic inuentarum illuſtrationis cauſa ſumus inueſtigaturi. Sit itaque $BC = a$; $AC = b$, ob $CP = x$; $PM = y$ erit $b - x : y = b : a$ ideoque $y = a - \frac{ax}{b}$; $dy = -\frac{adx}{b}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$. Hinc erit vis horizontalis reſiſtentiae ſecundum directionem OH agens $= -v\int\frac{dx^3}{ds^2} = -\frac{b^2v}{a^2+b^2}\int dx$, quae ita integrata, vt euaneſcat poſito $y = 0$ ſeu $x = b$ erit $= \frac{b^2v(b-x)}{a^2+b^2}$, poſito ergo $x = 0$, erit vis horizontalis totalis $= \frac{b^3v}{a^2+b^2}$. Vis vero verticalis ſeu cuius directio eſt OI eſt $= v\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{-abv}{a^2+b^2}\int dx = \frac{abv(b-x)}{a^2+b^2}$, vnde prodit vis verticalis totalis $= \frac{ab^2v}{a^2+b^2}$. Ad poſitionem vero rectarum OH et OI inueniendam iam cognita ſunt $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-b^3}{a^2+b^2}$ et $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$, quamobrem quaerenda ſunt $\int\frac{xdx^3}{ds^2}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}$. Eſt vero $\int\frac{xdx^3}{ds^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\int xdx = \frac{-b^4}{2(a^2+b^2)}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2} = \frac{-a^2}{a^2+b^2}$

ſed

$\int(b-x)dx = \frac{aabb}{2(a^2+b^2)}$; integratione vti eſt praeceptum ita abſoluta vt integralia euaneſcant poſito $x=b$ tumque facto $x=0$. Hinc igitur erit CH $= \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$AC, et CI $= \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ BC; punctum igitur O cadit in ipſum medium rectae AB. Quoniam autem poſita OK media directione reſiſtentiae, eſt IK : OI $= b : a =$ AC : BC, ex qua analogia perſpicitur mediam reſiſtentiae directionem OK eſſe normalem ad rectam AB: vis denique ipſa reſiſtentiae OK eſt $= \frac{bbv}{\surd(a^2+b^2)}$: quae quidem omnia ex propoſ. 50 ſponte conſequuntur.

Coroll.

553. Cum igitur ſit IK : OI $= b : a$ erit IK $= \frac{bb}{2a}$, et CK $= \frac{aa-bb}{2a}$; angulus vero quem media directio reſiſtentiae OK cum horizontali BC conſtituit eſt = ang. CAB, eiusve tangens eſt $= \frac{a}{b}$.

Exemplum 2.

554. Sit figura BCA ſemiſegmentum circulare ſeu BMA arcus circuli, cuius tangens in A ſit horizontalis, cuius ideo centrum cadet in E punctum rectae verticalis ACE. Ponatur BC $= a$; AC $= b$; et radius AE $= c$, erit $c^2 = a^2 + (c-b)^2$ ſeu $c = \frac{aa+bb}{2b}$. Poſito nunc CP $= x$, et PM $= y$, erit EP $= c-b+x$, indeque ex natura circuli $c^2 = y^2 + (c-b+x)^2$ ſeu $y = \surd(c^2-(c-b+x)^2)$ ex qua fit $y=0$, ſi eſt $x=b$. Erit autem porro $dy = \frac{-(c-b+x)dx}{\surd(c^2-(c-b+x)^2)}$ atque $ds = \frac{cdx}{\surd(c^2-(c-b+x)^2)}$; hincque $\frac{dx^2}{ds^2} = 1 - \frac{(c-b+x)^2}{cc}$. Quaerantur igitur ſequentia integralia hac

Tab. XXV. fig. 3.

conditione vt euanescant posito $y=0$ seu $x=b$, in iisque ponatur post integrationem $x=0$ seu $y=a$. Reperietur autem $\int\frac{dx^3}{ds^2} = \frac{-bb(3c-b)}{3cc}$; $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}=\int\frac{yydy}{cc}=\frac{a^3}{3cc}$. atque $\int\frac{xdx^3}{ds^2}=\int xdx-\int\frac{xdx(c-b+x)^2}{cc}=\frac{-b^3(4c-b)}{12cc}$ et $\int\frac{ydx^2dy}{ds^2}=\frac{a^4}{4cc}$. Ex his inuenitur $CH=\frac{b(4c-b)}{4(3c-b)}$ et $CI=\frac{3a}{4}$. Praeterea vero erit vis horizontalis $OH=\frac{bbv(3c-b)}{3cc}$ et vis verticalis $OI=\frac{a^3v}{3cc}$ quare media directio totius resistentiae erit OK existente $IK=\frac{b^3(4c-b)}{4a^3}$ seu $CK=\frac{3a^4-4b^3c+b^4}{4a^3}$; angulique OKI tangens erit $=\frac{a^3}{bb(3c-b)}$. Vniuersa igitur resistentia aequipollebit vi in directione OK vrgenti quae est $=\frac{v}{3cc}\surd(a^6+b^4(3c-b)^2)$.

Coroll. 1.

555. Cum sit $c=\frac{aa+bb}{2b}$; erit $aa=2bc-bb$ ideoque $CK=\frac{12bbcc-16b^3c+4b^4}{4a^3}=\frac{bb(c-b)(3c-b)}{a^3}$. Si ergo OK producatur concurret ea cum AC in ipso centro circuli E, est enim $\frac{CE}{CK}=\frac{a^3}{bb(3c-b)}=$ tang. ang. $OKI=\frac{OI}{KI}$.

Coroll 2.

556. Resistentiae igitur media directio OE per ipsum circuli centrum E transit, atque cum recta AE angulum AEO constituet, cuius tangens erit $=\frac{bb(3c-b)}{a^3}=\frac{(3c-b)\surd b}{(2c-b)\surd(2c-b)}$, sinus vero $=\frac{(3c-b)\surd b}{c\surd(8c-3b)}$.

Coroll. 3.

557. Quantitas vero totius resistentiae, quae se in directione OE exerit est $=\frac{v}{3cc}\surd(8b^3c^3-3b^4cc)=$ bv

$\frac{bv}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$; aequatur ſcilicet ponderi cylindri aquei cuius altitudo eſt v, baſis vero $= \frac{b}{3c}\sqrt{b(8c-3b)}$ ducto in latitudinem ſeu craſſitiem figurae ſi quam habet.

Coroll. 4.

558. Quoniam directio reſiſtentiae, quam ſingula elementa patiuntur, eſt ad curuam normalis, ea per centrum E tranſibit, vnde ſponte ſequitur mediam directionem reſiſtentiae quam arcus BMA patitur, per centrum E tranſire debere.

Coroll. 5.

559. Si arcus AMB quadranti aequetur, fiet $b=c$, atque anguli AEO tangens erit $=2$: potentiae vero reſiſtentiae aequiualentis quantitas erit $= \frac{c\sqrt{5}}{3}$.

Coroll. 6.

560. At ſi arcus AMB abeat in ſemicirculum vt fiat $b=2c$, angulus AEO fiet rectus ſeu media reſiſtentiae directio erit horizontalis, vis autem totius reſiſtentiae prodibit $= \frac{4c}{3}$, prout iam ex ante §. 509 traditis colligere licet.

Scholion 2.

561. Cum igitur tam pro figura plana duabus partibus ſimilibus et aequalibus gaudente, ſi ſecundum directionem diametri horizontaliter promoueatur, quam pro figura plana in aqua verticaliter promota reſiſtentiam determinauerimus, ex inſtituto reuertemur ad figuras planas aquae in ſitu horizontali innatantes, atque reſiſtentiam etiam de-

 finiemus

finiemus, cum non directe ſecundum diametrum ſed oblique promouentur. Haec enim inueſtigatio multo difficilior eſt, quam praecedens cum reſiſtentia, quam figura ex vtraque diametri parte ob diſſimilem alliſionem ad aquam patitur ſit diſſimilis; et hancobrem tam directionem mediam reſiſtentiae quam ipſam reſiſtentiae quantitatem determinari oportet. Facile enim intelligitur in iſtiusmodi motu obliquo directionem mediam reſiſtentiae non in diametrum incidere, ſed diametrum alicubi ſecare, cum eaque certam quendam angulum conſtituere; vbi illud punctum in quo diameter et media directio reſiſtentiae ſe interſecant breuitatis ergo centrum reſiſtentiae appellabimus; quippe cuius cognitio ad effectum reſiſtentiae, in figura circum axem verticalem conuertenda ſumme eſt neceſſaria, Incipiemus autem hanc tractationem a figuris ſimplicioribus, et primo quidem rectangulum parallelogrammum conſideremus, quo perſpiciatur, quantum tam media directio reſiſtentiae quam ipſa reſiſtentia pro varia curſus obliquitate immutetur.

PROPOSITIO 55.
Problema.

562. *Si parallelogrammum rectangulum* FGIH *in aqua ſecundum directionem quamcunque obliquam* CL *promoueatur, inuenire reſiſtentiae quam patietur tum directionem tum quantitatem.*

Tab. XXV. fig. 4.

Solutio.

Sit rectanguli FGIH latitudo $FG = HI = a$; longitudo $FH = GI = b$; atque ducatur axis AE itemque per centrum figurae

figurae C transuersa normalis BD, vt sit AC $= \frac{1}{2} b$; et BC $=$ CD $= \frac{1}{2} a$. Anguli autem obliquitatis cursus ACL sinus sit $= m$, cosinus vero $= n$, posito sinu toto $= 1$, ita vt futurum sit $m^2 + n^2 = 1$; celeritas autem qua rectangulum in directione CL progreditur, debita sit altitudini v. Iam dum haec figura promouetur, latera bina FG et GI erunt resistentiae exposita, atque anguli quo latus FG in aquam impingit sinus erit $= n$; anguli vero quo latus GI in aquam irruit sinus est $= m$. Resistentia igitur quam latus FG patietur erit $= n^2 a v$, eiusque directio incidet in axem ACE; resistentia vero quam patietur latus GI erit $= m^2 b v$, eiusque directio erit recta DB. Resistentia ergo aequiualet duabus viribus in puncto C applicatis quarum altera est $n^2 a v$ et directionem habet CE alterius vero $m^2 b v$ directio est CB. Media consequenter resistentiae directio incidet in rectam CR existente anguli RCE tangente $= \frac{m^2 b}{n^2 a}$; ipsiusque resistentiae in directione CR vrgentis quantitas est $v \sqrt{(n^4 a^2 + m^4 b^2)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

563. In quacunque igitur directione parallelogrammum rectangulum progrediatur, media directio resistentiae perpetuo transibit per eius punctum medium C, seu centrum resistentiae incidet in centrum figurae C

Coroll. 2.

564. Si igitur simul centrum grauitatis rectanguli in centrum figurae C incidat, tum resistentia omni carebit vi figuram circa centrum grauitatis conuertendi; atque tota resistentia impendetur ad motum ipsum alterandum.

Coroll. 3.

565. Si anguli LCA tangens ponatur $= v$ erit $\frac{m}{n} = v$, atque anguli RCE tangens erit $\frac{v^2 b}{a}$. Hancobrem resistentiae directio directe contraria erit ipsi motui, si fuerit vel $v = 0$, hoc est si figura secundum directionem CA progrediatur, vel $v = \frac{a}{b}$ hoc est si figura secundum diagonalem HCG progrediatur.

Coroll. 4.

566. Sit angulus ACL $<$ ACG seu $v = \frac{a}{\alpha b}$ denotante α numerum vnitate maiorem, erit anguli ECR tangens $= \frac{a}{\alpha^2 b}$, vnde sequitur angulum ECR fore minorem angulo LCA. Contra vero si fuerit angulus ACL $>$ ACG tum angulus ECR quoque maior erit quam angulus ACL.

Coroll. 5.

567. Differentiae autem angulorum ACL et ECR tangens est $= \frac{v^2 b - va}{a + v^3 b}$, vnde differentia horum angulorum prodibit maxima si capiatur v ex hac aequatione $bbv^4 - 2abv^3 - 2abv + aa = 0$.

Scholion.

568. Radices huius aequationis $b^2 v^4 - 2abv^3 - 2ab v + a^2 = 0$, eo modo reperiri possunt, quo vulgo aequationes biquadratae ad cubicas reduci solent sed hic commode accidit, vt cubica aequatio prodeat pura. Sit enim $a = k^b$, habebitur $v^4 - 2kv^3 - 2kv + kk = 0$ cuius factores ponantur hae aequationes $v^2 - \alpha v + \beta = 0$ et $v^2 - \delta v + \beta$

$v+\varepsilon=0$; eritque $\alpha+\delta=2k$; $\beta+\varepsilon+\alpha\delta=0$; $\alpha\varepsilon+\beta\delta=2k$ et $\beta\varepsilon=k^2$. Sit $\alpha\delta=2b$; erit $\alpha-\delta=2\sqrt{(k^2-2b)}$; atque $\alpha=k+\sqrt{(k^2-2b)}$ et $\delta=k-\sqrt{(k^2-2b)}$. Quia autem porro eſt $\beta+\varepsilon=-2b$, et $\beta\varepsilon=k^2$; erit $\beta-\varepsilon=2\sqrt{(b^2-k^2)}$, et $\beta=-b+\sqrt{(b^2-k^2)}$ ac $\varepsilon=-b-\sqrt{(b^2-k^2)}$. Cum denique ſit $\alpha\varepsilon+\beta\delta=2k$ erit $k+kb=-\sqrt{(k^2-2b)(b^2-k^2)}$, vnde ſumendis quadratis oritur $k^2=-k^4-2b^3$, ſeu $b=-\frac{\sqrt[3]{k^2(k^2+1)}}{\sqrt[3]{2}}=-\frac{\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)}}{2}$

Dato autem b dabuntur α, β, δ; et ε per ſuperiores aequationes, indeque erit vel $v=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{(\frac{\alpha^2}{4}-\beta)}$ vel $v=\frac{\delta}{2}\pm\sqrt{(\frac{\delta^2}{4}-\varepsilon)}$. Factis autem ſubſtitutionibus reperitur vel $v=$

$$\frac{k+\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}\pm\sqrt{(2k^2-\sqrt[3]{4kk(k^2+1)}+2k\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^3+1)})}-2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+7^2-4k^2)})})}}{2}$$

vel $v=\frac{k-\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}\pm\sqrt{(2k^2-\sqrt[3]{4kk(k^2+1)}-2k\sqrt{(k^2+\sqrt[3]{4k^2(k^2+1)})}+2\sqrt{(\sqrt[3]{16k^4(k^2+1)^2}-4kk)})}}{2}$

quae ergo ſunt omnes quatuor radices huius aequationis biquadratae $v^4-2kv^3-2kv+kk=0$. Poſito igitur $\frac{a}{b}$ loco k habebuntur illi curſus obliqui, cum quibus directio reſiſtentiae minime congruit; ab hoc autem diſcrimine pendet inſignis illa nauium proprietas, qua curſus etiam verſus ventum dirigi poteſt, quam ob cauſam etiam iſtam diſcrepantiam quo caſu maxima euadit diligentius inueſtigandam cenſuimus.

PROPOSITIO 56.
Problema.

569. *Moueatur rhombus* ABED *aquae horizontaliter inſidens oblique ſecundum directionem* CL *ita tamen vt ſola bina* Tab. XXV. fig. 5.

bina latera anteriora AB *et* AD *resistentiam sustineant: definire resistentiae tam directionem quam magnitudinem.*

Solutio.

Ponatur rhombi latus quoduis $AB = AD = a$; semidiameter $AC = b$, et alterius diagonalis semissis $BC = CD = c$, vt sit $a^2 = b^2 + c^2$. Directio vero motus CL cum axe CA angulum constituat ACL cuius sinus sit $= m$, cosinus vero $= n$ posito sinu toto $= 1$; celeritas denique qua rhombus in hac directione promouetur sit debita altitudini v. Cum iam sit anguli CAD sinus $= \frac{c}{a}$ et cosinus $= \frac{b}{a}$. erit anguli sub quo latus AD in aquam impingit sinus $= \frac{nc + mb}{a}$, anguli vero sub quo latus AB in aquam impingit sinus $\frac{nc - mb}{a}$. Hinc resistentia, quam latus AD patietur erit $= \frac{(nc + mb^3)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta FO, quae ad AD in eius puncto medio F normaliter insistit. Simili modo resistentia lateris AB erit $= \frac{(nc - mb)^2 v}{a}$, eiusque directio erit recta GO in puncto medio G rectae AB ad AB normalis. Centrum igitur resistentiae erit punctum O, existente $AO = \frac{aa}{2b}$ Resoluatur vtraque resistentiae vis in duas laterales, quae diagonalibus AE et BD sint parallelae, erit resistentia secundum AE vrgens $= \frac{cv(nc + mb)^2 + cv(nc - mb)^2}{a^2} = \frac{2cv(n^2c^2 + m^2b^2)}{a^2}$ resistentiae vero vis secundum directionem ipsi DB parallelam agens $= \frac{bv(nc + mb)^2 - bv(nc - mb)^2}{a^2} = \frac{4mnb^2cv}{a^2}$. Ex his media totius resistentiae directio reperitur OR, quae cum axe AE angulum constituet RCE cuius tangens est $= \frac{2mnb^2}{n^2c^2 + m^2b^2}$; ipsius vero

vero reſiſtentiae quantitas prodit $= \frac{2cv}{a^2}\sqrt{(n^4c^4 + 2m^2n^2b^2c^2 + m^4b^4 + 4m^2n^2b^4)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

570. In hac ergo figura quoque conſtans eſt centrum reſiſtentiae O, vtcunque curſus CL ab axe CA declinet, dummodo angulus ACL non ſuperet angulum DAD; hoc eſt dummodo ſit $\frac{m}{n} < \frac{c}{b}$.

Coroll. 2.

571. Si ergo figurae centrum grauitatis ſimul incidat in punctnm O, tum reſiſtentia figuram non conuertet, ſed tantum eius motum progreſſiuum afficiet, eum vel retardando vel curſum inflectendo.

Coroll. 3.

572. Angulus autem EOR maior erit quam angulus ACL ſi fuerit $\frac{2mnb^2}{n^2c^2+m^2b^2} > \frac{m}{n}$ hoc eſt ſi fuerit $2n^2b^2 - n^2c^2 > m^2b^2$, ſeu $\frac{m}{n} < \frac{\sqrt{(2b^2-c^2)}}{b}$. Quia autem eſt $\frac{m}{n} < \frac{c}{b}$, perſpicuum eſt, ſi fuerit $b > c$ ſeu AC > CD tum angulum EOR ſemper maiorem fore angulo ACL.

Coroll. 4.

573. Si fiat $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, quo caſu ſolum latus AD reſiſtentiae erit expoſitum, tum anguli EOR tangens erit $= \frac{b}{c}$. Scilicet angulus EOR hoc caſu complementum erit anguli ACL ad rectum quod quidem ex ſe ſponte patet.

PROPOSITIO 57.

Problema.

Tab XXVI. fig. 1.

574. *Si figura aquae innatans* AE *fuerit composita ex parallelogrammo rectangulo* HKNM *et duobus triangulis isoscelibus aequalibus* HAK *et* MEN *super lateribus oppositis* HK *et* MN *constitutis, haecque figura in directione* CL *ad diametrum* AE *obliqua promoueatur, inuenire resistentiae tum directionem tum magnitudinem.*

Solutio.

Ponantur primo in triangulo HAK, latus AK = AH $= a$; AP $= b$; HP = PK $= c$, ita vt sit $a^2 = b^2 + c^2$. Deinde rectanguli HMNK longitudo MH seu KN sit $= 2f$, vel ducta diametro transuersali BD sit KD = DN $= f$; anguli autem obliquitatis cursus ACL sinus sit $= m$, cosinus $= n = \sqrt{(1 - mm)}$; qui angulus minor sit quam angulus CEN, quo tria latera HA, AK et KN solum sint resistentiae exposita, celeritas denique qua haec figura in directione CL progreditur debita sit altitudini v. Consideretur nunc primum resistentia, quam sola trianguli latera HA et AK patiuntur cuius media directio IS per propositionem antecedentem transit per punctum I, existente AI $= \frac{aa}{2b}$, atque cum axe AE angulum CIS constituet, cuius tangens est $= \frac{2mnb^2}{n^2c^2 + m^2b^2}$ ipsa vero resistentiae vis erit $= \frac{2cv}{a^2}\sqrt{((n^2c^2 + m^2b^2)^2 + 4m^2n^2b^4)}$; seu quod eodem redit resistentia aequiualebit duabus viribus in I applicatis, quarum altera vrget versus IC estque $= \frac{2cv(n^2c^2 + m^2b^2)}{a^2}$ altera directionem habet ad hanc normalem, estque =

4mnb

$\frac{4mnb^2cv}{a^2}$. His euolutis inquiramus in resistentiam lateris KN, quod in aquam sub angulo cuius sinus est $= m$ impingit, eius igitur resistentia est $= 2m^2fv$ cuius directio ad KN est normalis atque in ipsam DB incidit. Haec ergo resistentia si cum priore, quam latera trianguli HA, AK sufferunt coniungatur, praebebit centrum resistentiae in O vt sit $CO : IO = \frac{4mnb^2cv}{a^2} : 2m^2fv = 2nb^2c : ma^2f$; vnde fit $CI : CO = 2nb^2c + ma^2f : 2nb^2c$. Est vero $CI = f + b \frac{-a^2}{2b} = \frac{2bf + 2bb - aa}{2b}$; ideoque $CO = \frac{nbc(2bf + 2bb - aa)}{2nb^2c + ma^2f)}$. Tota ergo resistentia ad duas vires in puncto O applicatas reducitur, quarum altera vrget in directione OC estque $= \frac{2cv(n^2c^2 + m^2b^2)}{a^2}$, alterius vero quae erit $= 2m^2fv + \frac{4mnb^2cv}{aa}$ directio ad illam est normalis. Hinc totius resistentiae media directio est recta OR, quae cum axe angulum EOR constituit, cuius tangens $= \frac{m^2a^2f + 2mnb^2c}{n^2c^3 + m^2b^2c}$; atque ipsius resistentiae quantitas erit $= \frac{2v}{a^2} \sqrt{((n^2c^3 + m^2b^2c)^2 + (m^2a^2f + 2mnb^2c)^2)}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

575. In hac igitur figura situs centri resistentiae O non est fixus, sed pendet ab obliquitate cursus nisi sit $f + b = \frac{a^2}{2b}$, quo casu in C incidit. Nam si angulus ACL euanescit, tum punctum O incidet in ipsum punctum I, atque quo maior fit obliquitas cursus ACL, eo propius punctum O ad C accedit.

Coroll. 2.

576. In huius modi igitur figura euitari nequit quin in curſu obliquo figura a reſiſtentia circa grauitatis centrnm quandoque conuertatur, niſi eo caſu quo cadit O in C. Ad hanc ergo conuerſionem impediendam opus erit nouis viribus.

Coroll. 3.

577. Manente autem eodem angulo ACL obliquitatis curſus, angulus EOR quem media directio reſiſtentiae cum axe ſeu ſpina AE conſtituit, eo erit maior, quo longius fuerit parallelogrammum rectangulum HMNK.

Coroll. 4.

578. Eo magis autem angulus EOR excedet angulum ACL, quo magis haec quantitas $m^2na^2f + 2mn^2b^2c$ ſuperat hanc $mn^2c^3 + m^3b^2c$. Eo maior autem eſt iſte exceſſus, quo longior fuerit figurae pars media ſeu parallelogrammum rectangulum.

Scholion.

579. Ex his caſibus ſatis clare perſpicitur, quomodo de reſiſtentia quam quaecunque figura in aqua oblique promota patitur, iudicium ferri conueniat. Scilicet cum in nauibus quae vento propelluntur requiratur, vt curſus quam maxime in eam plagam inſtitui queat, vnde ventus venit, quantum iſta proprietas obtineatur ex differentia angulorum, quos directio curſus et media directio reſiſtentiae cum ſpina conſtituit, colligere licebit, quo maior enim fuerit

fuerit iſta differentia, eo aptior erit nauis ad iſtum ſcopum conſequendum. Ex allatis autem intelligitur horum angulorum differentiam eo fore maiorem quo maior fuerit reſiſtentia laterum nauis reſpectu reſiſtentiae quam prora directe promota ſentit. Hancobrem primo naues ita conſtrui conuenit, vt ſecundum ſpinam directe promotae minimam ſentiant reſiſtentiam; tum vero vt, ſi curſus tantillum ſuſcipiatur obliquus, reſiſtentia maxime augeatur; qui poſterior ſcopus obtinetur, ſi nauis fiat vehementer longa, eiusque latera figuram fere planam ſint habitura. Hanc itaque etiam ob cauſam pars nauium anterior, quae in curſu directo ſola reſiſtentiam patitur ita eſt conformanda, vt minimam patiatur reſiſtentiam, quantum quidem id reliquae circumſtantiae permittunt. Sed haec omnia tum in ſequenti capite tum vero in altero libro vberius exponentur. Quod autem ad ſitum centri reſiſtentiae attinet, quo de eo facilius iudicari queat, ſequentes propoſitiones afferre eſt viſum

PROPOSITIO 58.

Problema.

580. *Si figura* ABED *ex duobus aequalibus ſimilibusque ſegmentis circularibus conſtet, ſuper communi chorda* AE *vtrinque diſpoſitis; eaque figura in aqua promoueatur oblique ſecundum directionem* CL, *determinare reſiſtentiae tum directionem tum magnitudinem.*

Tab. XXVI. fig. 2.

Solutio.

Sit F centrum arcus ADE, et G centrum arcus ABE, ponaturque $FD = GB = c$; $AC = EC = a$ $BC = CD = b$,

CD $=b$, erit FC $=$ GC $=c-b$, atque ex natura circuli $a^2+(c-b)^2=c^2$ vnde fit $2bc=a^2+b^2$. Sit iam anguli obliquitatis curſus ACL ſinus $=m$, coſinusque $=n$, ac ducantur tangentes Mm et Nn parallelae directioni curſus CL, radiique MG et FN, erunt anguli MGB, NFD aequales angulo ACL, eorumque propterea ſinus $=m$, coſinusque $=n$. Cum itaque arcuum BM et DN ſinus ſit $=m$ et coſinus $=n$; arcuum vero AB et AD ſinus ſit $=\frac{a}{c}$ et coſinus $=\frac{\sqrt{(c^2-a^2)}}{c}$, erit arcus AM ſinus $=\frac{an-m\sqrt{(c^2-a^2)}}{c}$ et coſinus $=\frac{am+n\sqrt{(c^2-a^2)}}{c}$; arcus vero ADN ſinus $=\frac{an+m\sqrt{(c_2-a^2)}}{c}$ et coſinus $=\frac{n\sqrt{(c^2-a^2)}-ma}{c}$. Quare ſi ex A ad radios GM et FN, qui inter ſe ſunt paralleli ducatur perpendicularis APQ erit AP $=na-m\sqrt{(c^2-a^2)}=m$ $a-m(c-b)$ et GP $=ma+n\sqrt{(c^2-a^2)}=ma+n(c-b)$. Simili modo erit AQ $=na+\cdot(c-b)$, et FQ $=n(c-b)-ma$. Sunt autem arcus AM et ADN eae figurae partes, quae ſolae reſiſtentiam patiuntur; ad reſiſtentiam igitur vtriusque arcus definiendam ſit celeritas, qua figura progreditur debita altitudini v. Reſiſtentiae autem arcus AM media directio tranſit per centrum arcus G, reduciturque ad duas potentias Gd, Ge, quorum illa Gd ad GM eſt normalis, haec vero Ge cum MG in directum iacet; eſt autem ex §. 554 vis Gd $=\frac{MP^2(3MG-M)v}{8MG^2}$ et vis Ge $=\frac{AP^3.v}{3MG^2}$. At eſt MP $=c-ma-n(c-b)$ et MG $=c$; ideoque 3 MG $-$ MP $=2c+ma+n(c-b)$ exiſtente AP $=na-m(c-b)$. Simili modo reſiſtentia, quam patitur arcus ADN, reducetur ad duas vires Fb et Fa in puncto F ſimiliter applicatas, vt ſit bF ad NF perpendicularis et a ſitum ſit in

in recta NF producta; eritque vis $Fb = \frac{NQ^2(3NF-NQ)v}{3NF^2}$ et vis $FA = \frac{AQ^3 v}{3NF^2}$, existente $NQ = c + ma - n(c-b)$, et $NF = c$; $3NF - NQ = 2c = ma + n(c-b)$, atque $AQ = na + m(c-b)$. Resoluantur hae vires in binas quarum alterae in FG incidant, alterae ad FG sint normales, quod facile fit, dum angulorum $e\,G\,\varepsilon$ et $a\,F\,\alpha$ sinus sit $= m$, cosinusque $= n$. Reperitur vero vis $Gg = \frac{nv \cdot MP^2(3MG-MP) + mv \cdot AP^3}{3MG^2}$ et vis $G\varepsilon = \frac{nv \cdot AP^3 - mv \cdot MP^2(3MG-MP)}{3MG^2}$. Pari ratione est vis $Ff = \frac{nv \cdot NQ^2(3NF-NQ)^2\, nv \cdot AQ}{3MG^2}$ et vis $F\alpha = \frac{nv \cdot AQ^3 + mv\, MQ^2(3NF-NQ)}{3MG^2}$. Ponatur $FC = GC = c - b = f$; erit $a^2 + f^2 + c^2$, atque $MP = c - ma - nf$; $NQ = c + ma - nf$; $3MG - MP = 2c + ma + nf$; $3NF - NQ = 2c - ma + nf$, atque $AP = na - mf$; ac $AQ = na + mf$. Hinc erit vis $Gg = \frac{v}{3cc}(2nc^3 - 3n^2c^2f - 2mna^3 + (nn - mm)f^3)$ et vis $G\varepsilon = \frac{v}{3cc}((n^2 - m^2)a^3 + 2mnf^3 - 2mc^3 + 3m^2ac^2)$: Similiterque vis $Ff = \frac{v}{3cc}(2nc^3 - 3n^2c^2f + 2mna^3 + (nn - mm)f^3)$ et vis $F\alpha = \frac{v}{3cc}((n^2 - m^2)a^3 - 2mnf^3 + 2mc^3 + 3m^2ac^2)$. Sit nunc OR media directio totius resistentiae, erit $CR = \frac{-mna^3 f}{2nc^3 - 3nnc^2f + (nn-mm)f^3}$; viribusque superioribus aequiualebunt duae vires Rr et RB in puncto R applicatae, eritque vis $Rr = \frac{2v}{3cc}(2nc^3 - 3nnc^2f + (nn - mm)f^3)$ et vis $RB = \frac{4mv}{3cc}(c^3 - nf^3)$. Vnde proueniet $CO = \frac{na^3 f}{c^3 - nf^3}$. Anguli igitur ROC quem media directio resistentiae cum axe AE constituit, tangens erit $\frac{2mc^3 - 2mnf^3}{2nc^3 - 3n^2c^2f + (nn-mm)f^3}$; atque ipsius resistentiae quantitas erit $\frac{2v}{3cc}\sqrt{(4c^6 - 12n^3c^5f + 4n(nn - 3mm)c^3f^3 + 9n^4c^4ff - 6nn(nn - mm)c^2f^4 + f6)}$ Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

581. Locus igitur centri reſiſtentiae O eſt variabilis, pendetque ab obliquitate curſus ſeu angulo ACL. Quo maior enim fit angulus ACL, eo propius punctum O ad C accedit.

Coroll. 2.

582. Si angulus ACL ſit infinite paruus, punctum O a C maxime erit remotum; erit enim diſtantia OC $= \frac{a^3 f}{c^3 - f^3} = \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$ propter $aa = cc - ff$. At ſi fiat $n = \frac{f}{c}$, quo caſu punctum M in A cadit, erit diſtantia minima $OC = \frac{a^3 ff}{c^4 - f^4} = \frac{aff}{cc+ff}$.

Coroll. 3.

583. Interuallum igitur, per quod centrum reſiſtentiae O vagatur, dum punctum M a B vsque ad A promouetur, eſt $= \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff} - \frac{aff}{cc+ff} = \frac{ac^3 f}{(cc+ff)(cc+cf+ff)} = a \left(\frac{f}{c} - \frac{ff}{cc} - \frac{f^3}{c^3} + \frac{2f^4}{c^4}\right)$ proxime: minus igitur eſt quam $\frac{af}{c}$.

Coroll. 4.

584. Si ſegmenta ABE et ADE abeant in ſemicirculos, tum fiet $f = 0$, hoc igitur caſu centrum reſiſtentiae O in ipſum punctum C cadit. Quo maior autem fuerit f, hoc eſt quo minora fuerint ſegmenta illa, eo magis centrum reſistentiae O a C diſtat

Coroll. 5.

585. Vt differentia angulorum COR et ACL diſtinctius percipiatur, ponamus angulum ACL eſſe infinite

nite paruum, quo casu fit $m =$ infinite paruo et $n = 1$, angulique A C L tangens $= m$. Anguli ergo C O R tangens erit $= \frac{2m(c^3 - f^3)}{2c^3 - 3ccf + f^3} = \frac{2m(c^2 + cf + ff)}{2c^2 - cf - ff} = \frac{2m(c^2 + cf + f^2)}{(c-f)(2c+f)}$; vnde se habebit angulus ACL ad angulum COR vt $2cc - cf - ff$ ad $2cc + 2cf + 2ff$.

Coroll. 6.

586. Si ergo obliquitas cursus seu angulus ACL fuerit vehementer exiguus, tum angulus COR maior erit angulo ACL, nisi sit $f = 0$ quo casu figura in integrum circulum abit. Semper enim si figura est integer circulus anguli ACL et COR sunt aequales, atque puncta O et C coincidunt.

Coroll. 7.

587. Si obliquitas fiat maxima seu arcus AM euanescat, vt solus arcus ADE resistentiae exponatur, tum fiet $m = \frac{a}{c}$ et $n = \frac{f}{c}$: atque anguli COR tangens erit $= \frac{a(c^4 - f^4)}{f(cc - ff)^2} = \frac{a(cc + ff)}{f(cc - ff)}$. Anguli igitur ACL tangens se habebit ad anguli COR tangentem vt $cc - ff$ ad $cc + ff$.

Coroll. 8.

588. Ex his intelligitur quo maior fuerit f respectu c, seu quo minora sint segmenta ABE et ADE, eo magis pro quauis obliquitate excedere angulum COR angulum ACL.

Coroll. 9.

589. Si angulus ACL euanescit, tum ob $m = 0$ et $n = 1$, prodit totius resistentiae vis $= \frac{2v(2c^3 - 3ccf + f^3)}{3cc}$

$= \frac{2v(c-f)(2c^2-cf-ff)}{3cc}$ at ſi obliquitas fiat maxima ſeu $m = \frac{a}{c}$ et $n = \frac{f}{c}$ tum prodit tota reſiſtentia $= \frac{4a^3 v \surd (cc+3ff)}{3c^3}$.

Scholion.

590. Hanc figuram ex duobus ſegmentis circularibus compoſitam ideo potiſſimum hic ſum contemplatus, quod ad cognitionem reſiſtentiae nauium ſatis ſit idonea. Quamuis enim ſectiones horizontales nauium non admodum congruant cum iſta figura, tamen ſi praecedentes caſus ſimul in conſiderationem ducantur, non difficile erit pro quauis curſus obliquitate tam centri reſiſtentiae locum, quam mediam reſiſtentiae directionem aeſtimatione aſſignare; Satis enim manifeſtum eſt, quo magis figura fuerit cuspidata, eo propius centrum reſiſtentiae verſus proram eſſe ſitum ceteris paribus. Eandem hanc etiam figuram Celeb. Ioh. Bernoulli in tractatu cui titulus eſt: Manoeuver des Vaiſſeaux, examini ſubiecit, atque peculiari modo in locum centri reſiſtentiae inquiſiuit, eo tantum caſu quo obliquitas curſus eſt quam minima, ſeu angulus ACL infinite paruus; cenſet autem hoc caſu centrum reſiſtentiae in eo puncto fore conſtitutum, vbi media directio reſiſtentiae quam arcus AB vel AD ſolus in curſu directo patitur, axem AE interſecat. At iſtud punctum non congruit cum noſtro puncto O, quando angulus ACL euaneſcit; Secundum methodum enim Bernoullianam reperitur interuallum $CO = \frac{af(2c+f)}{(c+f)^2}$, cum reuera ſit $CO = \frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$. Ex quo intelligitur centrum reſiſtentiae, cum obliquitas curſus eſt infinite parua, ex reſiſtentia quam vtraque curuae pars in curſu directo patitur, definiri non poſſe, ſed reuera curſum obliquum in conſiderationem du-

ci

ci oportere, quemadmodum in hac propositione a nobis est factum. Sed si aliae figurae praeter circulares fuerint propositae, tum resistentia in cursu obliquo vix ac ne vix quidem potest determinari, ob calculum nimis prolixum: quocirca eiusmodi investigationibus supersedendum esse duxi. Tentabo autem tantum eo casu, quo cursus obliquus minime a directo differt, locum centri resistentiae et mediam resistentiae directionem definire, quippe qui casus facilius examini subiicitur, et a taediosis calculis quodammodo liberari potest.

PROPOSITIO 59.
Problema.

591. *Si figura aquae innatans constet ex duabus partibus* AMBE *et* ANDE *aequalibus et similibus vtrinque ad axem* AE *dispositis, eaque moueatur in directione* CL *quae cum axe* AC *constituat angulum* ACL *infinite paruum; determinare mediam directionem resistentiae* OR, *ipsamque resistentiae quantitatem.*

Tab. XXVII. fig. 1.

Solutio.

Quia cursus obliquitas ponitur infinite parua eadem vtrinque figurae portio AMB et AND resistentiam patietur, quae si cursus foret directus, resistentiae esset exposita; cum non solum eae partes quibus tum arcus AMB augeri, tum arcus AND diminui deberet, fiunt infinite paruae, sed etiam sub angulo infinite paruo in aquam impingunt, ita vt earum resistentiam tuto negligere liceat. Ducta igitur ordinata MPN, sit $AP = x$; $PM = PN$

 $= y$,

$=y$, et arcus $AM = AN = s$. anguli vero ACL finus ponatur $= m$, cofinusque $= n$, erit m infinite paruum et propterea $n = 1$, celeritas autem qua figura progreditur debita fit altitudini v. Ducantur iam ipfi LC parallelae mM et nN, quae directionem repraefentabunt, qua puncta M et N in aquam impingunt; erit autem anguli A Mm finus $= \frac{ndy + mdx}{ds} = \frac{dy + mdx}{ds}$, anguli autem A N n finus $= \frac{ndy - mdx}{ds} = \frac{dy - mdx}{ds}$. Refiftentia ergo, quam elementum ds in M fufferet erit $= \frac{v(dy^2 + 2mdxdy)}{ds}$, eiusque directio erit normalis ad curuam Mp. Refiftentia vero quam elementum ds in N fufferet erit $= \frac{v(dy^2 - 2mdxby)}{ds}$ in directione normalis Np. Elementum igitur ds in M vrgebitur in directione M P vi $= \frac{vdxdy(dy + \cdot mdx)}{ds^2}$ at in directione axi A C parallela vi $= \frac{vdy^2(dy + 2mdx)}{ds^2}$. Simili modo elementum ds in N vrgebitur, in directione N P vi $= \frac{vdxdy(dy - 2mdy)}{dc^2}$. et in directione axi A C parallela vi $= \frac{vdy^2(dy - 2mdx)}{ds^2}$. Summa ergo virium qua ambo elementa coniunctim in directione A C vrgentur eft $= \frac{2vdy^3}{ds^2}$: at exceffus, quo in directione M N follicitantur $= \frac{4mvdx^2dy}{ds^2}$. Sit nunc oO media refiftentiae directio, ductoque ex o ad A C perpendiculo ov, erit integralibus vsque ad B et D fumtis

$$ov = \frac{4mv\int\frac{ydy^2dx}{ds^2}}{2v\int\frac{dy^3}{ds^2}} = \frac{2m\int ydv^2dx:ds^2}{\int dy^3:ds^2}$$ atque $$Av = \frac{4mv\int\frac{xdx^2dy}{ds^2}}{4mv\int\frac{dx^2dy}{ds^2}} = \frac{\int xdx^2dy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}.$$

Porro fi oO eft media directio refiftentiae, erit $ov : v\text{O} = 2m\int\frac{dx^2dy}{ds^2} : \int\frac{dy^3}{ds^2}$, vnde fit $v\text{O} = \frac{\int ydy^2dx:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$ atque $\text{AO} = \frac{\int(xdx + ydy)dxdy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$ quae expreffio

expreſſio determinat locum centri reſiſtentiae O. Tota igitur reſiſtentia reducitur ad duas vires in puncto O applicatas, quarum altera eſt $= 2v\int\frac{dy^3}{ds^2}$ agens in directione Os; altera vero eſt $= 4mv\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$, cuius directio eſt O$r$ ad AE normalis. Ipſa denique media directio OR cum axe AE angulum conſtituet EOR cuius tangens eſt $= \frac{2m\int dx^2dy:ds^2}{\int dy^3:ds^2}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

592. Hinc patet locum centri reſiſtentiae O omnino eſſe diuerſum ab eo, qui ſecundum modum ante indicatum (590) reperitur, per eum enim prodit AO $= \frac{\int(xdx+ydy)dy^2:ds^2}{\int dy^2dx:ds^2}$, cum tamen reuera ſit AO $= \frac{\int(xdx+ydy)dxdy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$.

Coroll. 2.

593. Angulus igitur ROE pariter erit infinite paruus, rationemque habebit ad angulum ACL vti ſe tenet $2\int\frac{dx^2dy}{ds}$ ad $\int\frac{dy^3}{ds^2}$; quae ergo ratio erit finita. Anguli enim infinite parui ſunt vt eorum tangentes vel ſinus.

Coroll. 3.

594. Reſiſtentiae ergo vis, quae agit ſecundum directionem axis AE aequalis eſt illi reſiſtentiae, quam pateretur eadem figura ſi curſu directo ſecundum directionem axis CA moueretur.

Scholion 1.

595. Ex ſolutione ſponte intelligitur, qua conditione omnia integralia, quae occurrunt ſint accipienda. Scilicet primo omnes integrationes ita ſunt inſtituendae, vt

omnia integralia euanefcant pofito vel x vel $y=0$. Deinde ad maximam figurae latitudinem eft refpiciendum, quae fi eft BD, poni debet $x=AC$ vel $y=BC$; quoniam ea pars figurae folum refiftentiam patitur quae fita eft inter proram A et maximam figurae latitudinem BD.

Coroll. 4.

596. Cum refiftentia fecundum directionem AE fit vt $\int\frac{dy^3}{ds^2}$: atque anguli ROE tangens $=\frac{2m\int dx^2dy:ds^2}{\int dy^3:ds^2}$, intelligitur, quo figurae directe promotae minor fuerit refiftentia, eo magis angulum ROE effe fuperaturum angulum ACL.

Coroll. 5.

597. Pendet autem integratio $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ ab integratione $\int\frac{dy^3}{ds^2}$: cum enim fit $dx^2+dy^2=ds$ erit $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}+\int\frac{dy^3}{ds^2}=y$; ideoque $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}=y-\int\frac{dy^3}{ds^2}$; vnde fit anguli EOR tangens $=\frac{2my}{\int dy^3:ds^2}-2m=\frac{2m\cdot BC}{\int dy^3:ds^2}-2m$.

Coroll. 6.

598. Inter omnes igitur figuras per puncta A et B tranfeuntes, ea pro data obliquitate ACL maximum angulum EOR producet, quae in curfu directo minimam patitur refiftentiam.

Coroll. 7.

599. Deinde quod ad locum centri refiftentiae O attinet, cum fit $AO=\frac{\int(xdx+ydy)dxdy:ds^2}{\int dx^2dy:ds^2}$ erit $AO=\frac{\int(xdx+ydy)dxdy:ds^2}{BC-\int dy^3:ds^2}$. Quo minor ergo eft refiftentia figurae in

in curſu directo, eo propius centrum reſiſtentiae O ad proram A erit ſitum manente numeratore $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2}$.

Exemplum I.

600. Sit pars figurae anterior reſiſtentiam excipiens triangulum iſoſceles BAD, in quo ſit $AC=a$; $BC=CD=b$, et $AB=AD=c=\sqrt{(a^2+b^2)}$. Directio vero curſus ſit CL, angulique ACL qui eſt infinite paruus, ſinus $=m$; et celeritas debita altitudini v. Iam poſito $AP=x$; $PM=PN=y$, erit $y=\frac{bx}{a}$; et $dy=\frac{bdx}{a}$; atque $ds=\frac{cdx}{a}$: Sit nunc O centrum reſiſtentiae, et OR media directio reſiſtentiae, erit ob $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}=\int\frac{abdx}{cc}=\frac{a^2b}{cc}$; $\int\frac{dy^3}{ds^2}=\int\frac{b^3dx}{acc}=\frac{b^3}{cc}$; $\int\frac{xdx^2dy}{ds^2}=\int\frac{abxdx}{cc}=\frac{a^3b}{2cc}$; atque $\int\frac{yxdy^2}{ds^2}=\int\frac{b^3xdx}{acc}=\frac{ab^3}{2cc}$; diſtantia $AO=\frac{a^3b+ab^3}{2a^2b}=\frac{cc}{2a}$; vnde patet centrum reſiſtentiae O in idem axis AC punctum incidere, in quo recta GO, quae ad AB eſt normalis eamque biſecat, rectae AC occurrit, prouti ex praecedentibus iam conſtat. Deinde anguli COR tangens eſt $=\frac{2ma^2}{b^2}$. ita vt ſe habeat angulus ACL ad angulum COR vti b^2 ad $2a^2$; quoties igitur fuerit $2a^2>b^2$ ſeu $\frac{BC}{AC}<\sqrt{2}$, ſiue angulus BAC minor quam 54°, 45′, toties angulus COR excedet angulum ACL. Vis denique reſiſtentiae agens in directione CO eſt $=\frac{2b^3v}{cc}$; atque vis qua in directione ad OC normali ſollicitabitur erit $=\frac{4ma^2bv}{cc}$.

Tab. XXVII. fig. 2.

Exemplum 2.

601. Conſtet figura ex duobus ſegmentis circularibus ABE, ADE aequalibus et ſimilibus ſitque $AC=a$; $BC=CD=b$; atque radius circuli ex quo haec ſegmenta ſunt deſumta ſit $=c$. ponatur autem breuitatis cauſa $c-b=f$, vt ſit $cc=a^2+ff$. Porro ſit CL directio curſus angulique ACL, qui ponitur infinite paruus, ſinus $=m$, et celeritati altitudo debita $=v$. Iam cum ſit $AP=x$; $PM=PN=y$, erit ex natura circuli $x=a-\sqrt{(c^2-(f+y)^2)}$; $dx=\frac{(f+y)dy}{\sqrt{(c^2-(f+y)^2)}}$ et $ds=\frac{cdy}{\sqrt{(c^2-(f+y)^2)}}$; vnde sequentia integralia reperientur $\int\frac{dy^3}{ds^2}=\int\frac{ccdy-(f+y)^2dy}{cc}$ $=b+\frac{f^3}{3cc}-\frac{c}{3}=\frac{2c^3-3ccf+f^3}{3cc}=\frac{(c-f)^2(2c+f)}{3cc}$ atque $\int\frac{dx^2dy}{ds^2}=c$ $-f-\frac{(c-f)^2(2c+f)}{3cc}=\frac{(c-f)(cc+cf+ff)}{3cc}=\frac{c^3-f^3}{3cc}$. Deinde eſt $\int\frac{xdx^2dy}{ds^2}=\frac{a(c^3-f^3)}{3cc}-\int\frac{(f+y)^2dy\sqrt{(cc-(f+y)^2)}}{cc}$ atque $\int\frac{ydxdy^2}{ds^2}=$ $\int\frac{(f+y)ydy}{cc}\sqrt{(cc-(f+y)^2)}$; vnde erit $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2}=$ $\int\frac{a(c^3-f^3)}{3cc}-\frac{f}{cc}(f+y)dy\sqrt{(cc-(f+y)^2)}=\frac{a(c^3-f^3)}{3cc}-\frac{a^3f}{3cc}=\frac{ab}{3}$. Ex his oritur $AO=\frac{abcc}{c^3-f^3}=\frac{acc}{cc+cf+ff}$ atque $CO=\frac{af(c+f)}{cc+cf+ff}$ vt ſupra (582). Anguli autem COR, quem media directio reſiſtentiae OR cum axe AC conſtituit tangens eſt $=\frac{2m(cc+cf+ff)}{(c-f)(2c+f)}$ vti ſupra (585.)

Exemplum 3.

Tab. XXVII. fig. 3.

602. Sit figura aquae inſidens ellipſis ABED cuius ſemiaxis AC ſit $=a$; alter $BC=CD=b$ atque CL curſus directio infinite parum diſſidens ab axe AC, ita vt anguli ACL ſinus m ſit infinite paruus; altitudo vero celeritati, qua haec figura promouetur, debita ſit $=v$. Iam

poſitis

positis abscissa $AP = x$, applicatis $PM = PN = y$, erit $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$, siue $x = a - \frac{a}{b}\sqrt{(bb - yy)}$; hinc igitur fit $dx = \frac{aydy}{b\sqrt{(bb-yy)}}$ et $ds^2 = \frac{dy^2(b^4 + (a^2-b^2)yy)}{bb(bb-yy)}$. Quare integralia, quibus opus est ita se habebunt $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \int\frac{a^2y^2dy}{b^4+(aa-bb)yy} = \frac{aab}{aa-bb} - \frac{a^2b^4}{aa-bb}\int\frac{dy}{b^4+(aa-bb)yy}$ vbi duo casus sunt considerandi, prout fuerit $a > b$ vel $a < b$; si enim $a > b$ seu $AC > BC$ prouenit $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{a^2b}{aa-bb} - \frac{a^2b^2}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$ at si $a < b$ erit $\int\frac{dx^2dy}{ds^2} = \frac{a^2b^2}{2(bb-aa)^{\frac{3}{2}}}\,\ell\,\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{b-\sqrt{(bb-aa)}} - \frac{a^2b}{bb-aa} = \frac{a^2b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}}\,\ell\,\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a} - \frac{a^2b}{bb-aa}$. Quia autem est $\int\frac{dy^3}{ds^2} = b - \int\frac{dx^2dy}{ds^2}$ erit eo casu, quo est $a > b$, $\int\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{-b^3}{aa-bb} + \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$ casu vero quo est $a < b$ erit $\int\frac{dy^3}{ds^2} = \frac{b^3}{bb-aa} - \frac{a^2b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}}\,\ell\,\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}$. Deinde cum sit $\frac{xdx^2dy}{ds^2} = \frac{a^3y^2dy - \frac{a^2}{b}y^2dy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$, atque $\frac{ydxdy^2}{ds^2} = \frac{ab\,ydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$; erit $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = a\int\frac{a^2y^2dy}{b^4+(aa-bb)yy} - \frac{a}{b}\int\frac{(aa-bb)yydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$. Est vero $\int\frac{(aa-bb)yy\,ydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy} = \frac{\pi}{4}\frac{bb(a-b)^2}{(aa-bb)}$ denotante $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum in circulo. Quamobrem si $a > b$ erit $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = \frac{a^3b}{aa-bb} - \frac{a^3b^2}{(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}$ A tang. $\frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$

Mm —

$-\frac{\pi ab(a-b)^2}{4(aa-bb)}$; at si $a < b$ erit $\int\frac{(xdx+ydy)dxdy}{ds^2} = \frac{a^3b^2}{(bb-aa)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right) - \frac{a^3b}{bb-aa} + \frac{\pi ab(a-b)^2}{4(aa-bb)}$. Centrum itaque resistentiae situm erit in O vt sit $AO = a - \frac{\pi ab(a-b)^2}{4a^2b - \frac{4a^2b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{A tang.} \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}}$; ideoque $CO = \frac{\pi(a-b)^2}{4a - \frac{4b}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \text{A tang.} \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}}$; casu quo est $a > b$. At casu quo est $a < b$ erit $CO = \frac{-\pi(b-a)^2}{\frac{4ab}{\sqrt{(bb-aa)}}\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right) - 4a}$ $= \frac{\pi(b-a)^2\sqrt{(bb-aa)}}{4ab\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right) - 4a\sqrt{(bb-aa)}}$. Anguli denique COR tangens erit $= \frac{2ma^2\sqrt{(aa-bb)} - 2ma^2b \text{ A tang.} \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}}{-bb\sqrt{(aa-bb)} + a^2b \text{ A tang.} \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}} =$ $\frac{-2ma^2\sqrt{(bb-aa)} + 2ma^2b\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)}{bb\sqrt{(bb-aa)} - a^2b\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{a}\right)}$, quarum expressionum, illa valet si $a > b$, haec vero si $a < b$. Innotescit igitur media directio resistentiae OR quam figura proposita elliptica secundum directionem CL promota sentit.

Coroll. 1.

603. Si integrationes, quae tum a quadratura circuli tum hyperbolae pendent, per series absoluantur, erit $CO = \frac{\pi(a-b)^2}{4a\left(\frac{aa-bb}{3bb} - \frac{(aa-bb)^2}{5b^4} + \frac{(aa-bb)^3}{7b^6} - \text{etc.}\right)}$ atque anguli COR tangens $= \frac{2m\left(\frac{aa-bb}{3bb} - \frac{(aa-bb)^2}{5b^4} + \frac{(aa-bb)^3}{7b^6} - \text{etc.}\right)}{-\frac{bb}{aa} + 1 - \frac{(aa-bb)}{3bb} + \frac{(aa-bb)^2}{5b^4} - \frac{(aa-bb)^3}{7b^6} + \text{etc.}}$ quae formulae aeque valent siue sit $a > b$ siue $a < b$.

Co-

Coroll. 2.

604. Cum sit $-\frac{bb}{aa}+1=\frac{aa-bb}{aa}$, erit anguli COR tangens $=\frac{2m(\frac{1}{3bb}-\frac{(aa-bb)}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^2}{6b^6}-\text{etc.})}{\frac{1}{aa}-\frac{1}{3bb}+\frac{aa-bb}{5b^4}-\frac{(aa-bb)^2}{7b^6}+\text{etc.}}$ similique modo fiet interuallum $CO=\frac{\pi(a-b)}{4a(a+b)(\frac{1}{3bb}-\frac{(aa-bb)}{5b^4}+\frac{(aa-bb)^2}{7b^6}-\text{etc.})}$

Coroll. 3.

605. Si ellipsis proxime ad circulum accedat ita vt prope sit $b=a$, existente $b=a-dw$, erit ob terminos euanescentes $\frac{3\pi dw}{8}=CO$; atque hoc casu etiam fit anguli COR tangens $=m$, seu angulus COR aequalis erit angulo ACL.

Scholion 2.

606. Integratio formulae differentialis $\frac{(a^2-b^2)yydy\sqrt{(bb-yy)}}{b^4+(aa-bb)yy}$, quae in hoc exemplo occurrit notatu est digna, eo quod integrale eo casu, quo ponitur $y=b$, contra omnem expectationem finite et tam simplici forma exprimitur. Si enim integrale indefinitum desideraretur, tum maxime prolixa et intricata expressio inueniretur, ex qua etiam difficillimum foret integrale pro casu $y=b$ exhibere. Peculiari igitur in hac integratione vsus sum modo, quo statim pro eo solum casu, quo est $y=b$, integrale prodit, cuius fundamentum in hoc consistit; quod sit $\int y^{m+2}dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}=\frac{(m+1)bb}{m+n+3}\int y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$, eo casu, quo ponitur $y=b$. Hinc igitur reperitur $\int(\alpha+\beta y^2+\gamma y^4+\delta y^6+\varepsilon y^8+\text{etc.})y^m dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}=(\alpha+\beta\frac{(m+1)bb}{m+n+3}+\frac{\gamma(m+1)(m+3)b^4}{(m+n+3)(m+n+5)}+$

$+\frac{(m+1)(m+3)(m+5)b^6}{(m+n+3)(m+n+5)(m+n+7)} + \text{etc.}) \int y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}$. Cum nunc fit $\frac{1}{cc+yy} = \frac{1}{cc} - \frac{yy}{c^4} + \frac{y^4}{c^6} - \frac{y^6}{c^8} + \text{etc.}$ erit $\frac{\int y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy}$

$= \left(\frac{1}{cc} - \frac{(m+1)b^2}{(m+n+3)c^4} + \frac{(m+1)(n+3)b^4}{(m+n+3)(m+n+5)c^6} - \frac{(n+1)(n+3)(m+5)b^6}{(m+n+3)(m+n+5)(m+n+7)c^8} + \text{etc.}\right)$

$\int y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ eo quidem casu quo fit $y=b$. Series autem ista, quanquam in infinitum progreditur, tamen ad formam finitam potest reduci posito enim $\frac{b}{c} = z$, summa illius seriei est $= \frac{(m+n+1)c^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}}}{b^{m+n+1}}$

$\int \frac{z^{m+n} dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}}$ integrali hoc ita sumto vt euanescat posito $z=0$. Posito igitur $\int \frac{z^{m+n} dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}} = C$ erit

$\int \frac{y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy} = \frac{(m+n+1)Cc^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}} \int y^m}{b^{m+n+1}}$

$dy(bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ Quando autem m est numerus par et n impar, tum $\int y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}$ vlterius reduci potest ad $\int \frac{dy}{\sqrt{(bb-yy)}}$, cuius integrale casu quo $y=b$ fit $\frac{\pi}{2}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter est $=1$. Erit autem $\int y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdots}{(m+2)(m+4)(m+6) \cdots}$

$\frac{n}{(m+n+1)} b^{m+n+1}$ vnde denique habetur $\int \frac{y^m dy (bb-yy)^{\frac{n}{2}}}{cc+yy} =$

$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots n}{(m+2)(m+4)(m+6) \cdots (m+n+1)} \cdot (m+n+1)$

c^m

$c^{m-1}(bb+cc)^{\frac{n}{2}}$ C existente $C = \int \frac{z^{m+n}dz}{(1+zz)^{\frac{n+2}{2}}}$, et $z=\frac{b}{c}$, ita vt ob m numerum parem n vero imparem C sit quantitas algebraica. His igitur ad nostrum casum applicatis, quo posito $\frac{b^4}{aa-bb}=cc$, formula nostra transit in hanc $\int\frac{yydy\sqrt{(bb-yy)}}{cc+yy}$, vnde fit $m=2$ et $n=1$. Erit ergo $C=\int\frac{z^3dz}{(1+zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2+zz}{\sqrt{(1+zz)}} - 2 = \frac{2cc+bb}{c\sqrt{(bb+cc)}} - 2$, ideoque integrale desideratum $= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4(2cc+bb-2c\sqrt{(bb+cc)}) = \frac{\pi}{4}(\sqrt{(bb+cc)}-c)^2 = \frac{\pi bb(a-b)^2}{4(aa-bb)}$; prouti supra posuimus.

PROPOSITIO 60.

Problema.

607. *Si figura plana rectilinea* ABCDEF *fuerit circulo inscriptibilis, tum secundum quamcunque directionem* OL *in aqua moueatur, media directio resistentiae perpetuo per centrum circuli* O *transibit.* Tab. XXVII. fig. 4.

Demonstratio.

Quoniam resistentiae directio, quam latus quodcunque figurae ab aqua suffert, ad ipsum latus in suo puncto medio est normalis, atque quodlibet latus sit chorda circuli circumscripti; directio resistentiae cuiusuis lateris per centrum circuli circumscripti O transibit. Quotcunque igitur latera figurae resistentiam excipiant, singulorum directio resistentiae per centrum O transibit; et hancobrem harum singularum resistentiarum media directio per idem centrum O transeat necesse est. Resistentia ergo

go totalis, quam figura propofita fecundum quamcunque directionem promota patitur, per centrum circuli circumfcripti O tranfit. Q. E. D.

Coroll. 1.

608. Si igitur huius figurae centrum grauitatis fimul in centro circuli circumfcripti O fuerit fitum, tum refiftentia nullam habebit vim ad figuram conuertendam, in quacunque directione etiam figura progrediatur.

Coroll. 2.

609. Intelligitur etiam, fi modo anterior figurae pars circulo fuerit infcriptilis, neque curfus obliquitas fit tanta, vt pofteriores figurae partes refiftentiam excipiant; tum pariter refiftentiae mediam directionem per centrum circuli prorae circumfcripti O effe tranfituram.

Coroll. 3.

610. Si ergo huiusmodi figura diametro fuerit praedita, diameter per centrum circuli circumfcripti tranfibit hocque cafu centrum refiftentiae fixum habebit fitum in ipfo centro circuli circumfcripti.

Scholion.

611. Infignis haec eft proprietas figurarum rectilinearum circulo infcriptibilium, quod in iis centrum refiftentiae conftantem obtineat fitum, quantumvis curfus fit obliquus, dum in aliis figuris fitus centri refiftentiae pro varia curfus obliquitate tantopere mutetur; videturque ifta pro-

proprietas propria figurarum circulo inſcriptibilium; ita vt in alias figuras non competat. Superfluum autem foret plures alias figuras planas, aquae innatantes conſiderare, cum ex allatis facile ſit iudicium de reſiſtentia cuiuscunque figurae oblatae formare. Hancobrem miſſa reſiſtentia, quam tantum lineae ſiue rectae ſiue curuae tanquam termini figurarum planarum in aqua patiuntur, progrediamur ad caput ſequens in eoque ad figuras ſolidas, quae proprie ad inſtitutum noſtrum pertinent, inueſtigaturi quantam reſiſtentiam quodcunque corpus in aqua promotum ſufferat, quae reſiſtentia ex ſuperficie corporis aquae ſubmerſa et in aquam impingente deriuari debet. Simili ſcilicet modo, quo hactenus ſumus vſi, ſuperficies omnis conſtare concipitur ex innumeris planis, quorum ſingula reſiſtentiam patiuntur ipſis ſuperficiebus et quadrato anguli incidentiae coniunctim proportionalem. Ita ſi ſuperficies plana cuius area ſit $=$ aa in aquam impingat ſub angulo cuius ſinus eſt m, velocitate debita altitudini v tum vis reſiſtentiae aequiualebit ponderi cylindri aquei cuius baſis eſt a^2 et altitudo $= m^2 v$, directio vero reſiſtentiae erit ad ipſam ſuperficiem planam normalis, atque per eius centrum grauitatis tranſit, prout in initio huius capitis ſatis eſt oſtenſum. Eiusmodi autem corpora tantum conſiderabo, quae plano diametrali verticali gaudeant, quo in duo fruſta aequalia et ſimilia dispeſcantur, huius modi enim corpora pro noſtro inſtituto tantum conſiderari merentur. Praeterea curſus directionem ponemus directam, hoc eſt, quae in ipſo plano diametrali ſit ſita; qua adiunctione inquiſitio reſiſtentiae fit facilior, cum directio reſiſtentiae ſponte ſe praebeat, quippe quae pariter

ter in planum diagonale incidit. Tantum igitur superest, vt quantitas resistentiae, et ipsa eius, quam plano diagonali habet, positio definiatur. Primum quidem pro hoc casu propositionem maxime generalem praemittemus, quo deinceps eo facilius ad quasuis figurarum species progredi liceat.

Caput

Caput Sextum DE RESISTENTIA, QVAM CORPORA QVAECVNQVE IN AQVA MOTV DIRECTO LATA PATIVNTVR.

PROPOSITIO 61. Problema.

612. *Sit* ATDB*b* *figura nauis anterior aquae immersa et plano diametrali verticali* ACD *in duas portiones aequales et similes diremta; haecque figura in aqua cursu directo progrediatur secundum directionem* CAL: *determinare resistentiam, quam haec figura in motu suo patietur.*

Tab. XXVIII. fig. 1.

Solutio.

Repraesentatur in hac figura partis anterioris seu prorae nauigii aliusue corporis similis aquae innatantis ea portio quae aquae est immersa, cuiusque superficies in cursu directo ab aqua resistentiam patitur. In ea igitur est planum horizontale AB*b* sectio aquae, planum verticale ACD dirimit istam portionem ita in duas partes similes et aequales ACDB et ACD*b*, vt omnes rectae horizontales in plano ACD ductae sint totidem diametri sectionum horizontalium seu plano AB*b* parallelarum solidi propositi. Cum igitur motus huius corporis in aqua fiat secundum

 dire-

directionem horizontalem CAL, manifestum est mediam resistentiae directionem incidere debere in ipsum planum diametrale ACD; vnde vis resistentiae partim motum retardabit, partim corpus ex aqua eleuabit, si quidem media directio non fuerit horizontalis, sed sursum vergens. Ad hunc ergo resistentiae duplicem effectum definiendum, sit primo altitudo celeritati, qua corpus in directione CAL progreditur debita altitudini v. Deinde sumta recta AC pro axe sit in ea abscissa $AP = x$, atque per punctum P facta concipiatur sectio verticalis STs ad planum diametrale ACD normalis, in cuius basi Ss ponatur portio quaecunque $PM = y$; et verticalis $MQ = z$. Definietur igitur hoc modo in superficie corporis propositi punctum Q per aequationem inter tres variabiles x, y et z. Sit autem ista aequatio reducta ad hanc aequationem differentialem $dz = Pdx + Qdy$, in qua P et Q sint functiones quaepiam ipsarum x et y, non inuoluentes z; haecque aequatio ob partes vtrinque circa diametrale planum ACD sitas similes et aequales vtriusque medietatis ACDB, ACDb naturam exprimet. Iam quo pateat sub quonam angulo elementum superficiei in Q sumtum in aquam impingat, vel planum tangens superficiem in Q vel recta normalis QR ad superficiem in puncto Q definiri debebit. Investigemus ergo positionem normalis huius QR, quem in finem primo solum sectionem STs considerabimus, cuius natura ob x constans hac exprimetur aequatione $dz = Qdy$, ex qua ita definietur positio normalis QN ad arcum SQT, vt sit subnormalis $MN = -\frac{zdz}{dy} = -Qz$ vnde fit $PN = -y - Qz$. Quare si in plano ABb ad

MN

MN ducatur perpendicularis NR, omnes rectae ex Q ad hanc rectam NR ductae ad curuam SQT in puncto Q erunt normales; quarum quae simul ad ipsam superficiem in puncto Q sit normalis, reperietur hoc modo. Per puncta M et Q concipiatur sectio verticalis IMGH plano diametrali ACD parallela, ac curuae IQH ob y constans natura exprimetur hac aequatione $dz = Pdx$. Sit nunc recta QK normalis ad curuam IQH in puncto Q, erit subnormalis $MK = \frac{zdz}{dx} = Pz$. Si ergo in plano ABb ad rectam MK ducatur normalis KVR, omnes quoque rectae ex Q ad lineam KR ductae normales erunt in Q ad curuam IQH. Cum itaque rectae NR et KR sese intersecent in puncto R, existente $AV = x + Pz$, et $VR = PN = -y - Qz$, quarum haec VR ad alteram AV est perpendicularis; erit recta QR in puncto Q tam ad curuam SQT quam IQH normalis; et hancobrem haec recta QR normalis erit ad superficiem ipsam in puncto Q. Angulus ergo quo superficiei elementum in Q in aquam impingit, complementum erit ad rectum eius anguli quem normalis QR cum directione cursus CAL seu cum recta RN huic parallela constituit, qui angulus est QRN. At ob $MN = -Qz$; erit $QN = z\surd(1+QQ)$ et ob $NR = MK = Pz$ erit $QR = z\surd(1+PP+QQ)$ vnde anguli QRN sinus erit $= \frac{\surd(1+QQ)}{\surd(1+PP+QQ)}$ cosinus vero $= \frac{P}{\surd(1+P^2+Q^2)}$, qui cosinus simul sinus erit anguli sub quo superficiei elementum in Q situm in aquam impingit. Quare si elementum superficiei ponatur $= dS$, erit vis resistentiae quam patietur $= \frac{P^2 v dS}{1+P^2+Q^2}$: huiusque vis dire-

 ctio

ctio ſita erit in ipſa normali QR ad ſuperficiem. Oportet autem elementum ſuperficiei dS per differentialia cordinatarum x, y et z exprimi, quo per integrationem totalis reſiſtentia colligi queat. Concipiatur igitur abſciſſa x creſcere elemento dx, et applicata y elemento dy; orieturque in P rectangulum infinite paruum $dxdy$ in plano A B b poſitum, cui ex angulis eius deorſum ductis verticalibus in ſuperficie reſpondebit elementum dS, cuius inclinatio ad planum ABb, quae aequalis eſt angulo MQR praebebit $dS = dxdy\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$. Hinc ergo reſiſtentia quam elementum dS patietur erit $= \frac{P^2 v dx dy}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$, eiusque directio incidet in normalem QR. Reſoluatur nunc haec reſiſtentiae vis in ternas inter ſe normales quarum directiones ſint parallelae coordinatis tribus AP, PM, et MQ. Cum igitur hae tres vires concipi queant in puncto R applicatae, figura in R verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1 + P^2 + Q^2}$; tum vrgebitur in directione Rn axi AC parallela vi $= \frac{P^3 v dx dy}{1 + P^2 + Q^2}$; denique vrgebitur in directione Rk rectae Ss parallela vi $= \frac{-P^2 Q v dx dy}{1 + P^2 + Q^2}$. Si nunc reſiſtentia elementi in altera medietate ACDb analogi ſimili modo colligatur, eaque cum inuenta coniungatur, vires in directionibus ipſi Ss parallelis ſe mutuo deſtruent; at in V corpus verticaliter ſurſum pelletur vi $= \frac{2P^2 v dx dy}{1 + P^2 + Q^2}$; ſimulque in directione axis VC directe retrorſum vrgebitur vi $= \frac{2P^3 v dx dy}{1 + P^2 + Q^2}$. A reſiſtentia igitur, quam patitur portio ſuperficiei a duabus ſectionibus STs et altera huic parallela et interuallo dx diſſita abſciſſae figura retrorſum vrgebitur

tur in directione AC vi $= 2vdx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, quae integratio in qua ponitur x constans ita absoluatur vt euanescat posito $y = 0$, tumque ponatur $y =$ PS. Sursum vero vrgebitur vi $= 2vdx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$ cuius vis momentum respectu puncti A erit $2vdx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$; quae integralia eodem modo quo ante sunt accipienda. Totalis ergo resistentia quam integra superficies ab aqua patietur, reducitur ad duas vires quarum altera retrorsum vrgebitur in directione AC vi $= 2v\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, vbi notandum integrale $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ praescripto modo sumtum fore functionem ipsius x tantum; ex quo posterius integrale $\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, ita sumi debet vt euanescat posito $x = 0$, hocque facto poni debet $x =$ AC, quo resistentia totius corporis propositi obtineatur. Simul vero figura sursum verticaliter vrgebitur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$, cuius vis momentum cum sit $= 2v\int dx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$ ea censenda est applicata in puncto O axis AC, ita vt sit AO $= \frac{\int dx \int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}$ integralibus ea lege, qua est praeceptum sumtis. Ex his ergo ambabus viribus resistentiae aequiualentibus reperietur media totius resistentiae directio, quae per punctum O in plano ACD transibit, atque cum AC angulum constituet cuius tangens erit $= \frac{\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}}{\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}}$, sub quo angulo media directio resistentiae ex O versus puppim sursum verget Q. E. I.

Coroll. 1.

613 Nauis igitur curſus directo ſecundum directionem AL progrediens a reſiſtentia retardabitur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$, quae expreſſio volumen aquae indicat cuius pondus ipſi vi eſiſtentiae eſt aequale.

Coroll. 2.

614. Cum autem nauis inſuper ſurſum vrgeatur vi $= 2v\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2}$, tanta vi nauis quaſi leuior facta eſt cenſenda, eaque ex aqua attolletur, aequiualet vero etiam ponderi aquae, cuius volumen iſta expreſſione indicatur.

Coroll. 3.

615. Praeterea vero, niſi media directio reſiſtentiae per ipſum grauitatis centrum tranſeat, nauis a reſiſtentia circa axem latitudinalem conuertetur, eiusque prora vel eleuabitur vel deprimetur, prout directio reſiſtentiae vel ſupra vel infra centrum grauitatis dirigatur.

Coroll. 4.

616. Denique ex inuentis expreſſionibus manifeſtum eſt, omnes reſiſtentiae effectus, quitum in retardanda tum alleuanda tum inclinanda naui conſiſtunt rationem ſequi duplicatam celeritatum, quibus nauis promouetur.

Coroll. 5.

616. Superficies tota huius corporis ex datis formulis ita calculo ſubducetur. Cum elementum ſuperficiei dS

dS fit $= dx dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ integretur primo $dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ posito x constante ita vt integrale euanescat posito $y=0$ tumque ponatur $y=PS$, quo facto integrale abibit in functionem quandam ipsius x; ita vt $\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$ assignari queat, quod integrale posito $x=AC$ bis sumtum, totam superficiem praebebit.

Coroll. 6.

617. Ad soliditatem autem totius figurae ABDb inueniendam, sit $PT=t$ et $PS=s$ erunt t et s functiones ipsius x ex aequatione $dz=Pdx+Qdy$ assignabiles. Tum vero erit area $PTS=\int zdy=-\int ydz$ ob $z=0$ quando fit $y=s=-\int Qydy$. Integrale $\int Qydy$ ita sumatur posito x constante, vt euanescat posito $y=0$ tumque ponatur $y=s$. Quo facto $2\int -dx \int Qydy$ posito post integrationem $x=AC$ dabit soliditatem totius figurae.

Coroll. 7.

618. Cum superficies ABDb ponatur tota atque sola resistentiam pati, si quidem nauis in directione AL progrediatur, necesse est vt planum BDb sit amplissima nauis sectio transuersalis, atque insuper vt omnia totius huius portionis ABDb plana tangentia versus proram inclinent.

Coroll. 8.

619. Hinc etiam colligitur, si figura ABDb fuerit semissis corporis cuiusdam aqua grauioris, hocqne corpus in aqua vel descendat vel totum aquae submersum moueatur in directione AL, tum resistentiam esse passurum secundum

cundum directionem AC tantum, quae erit $= 4v\int dx \int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$.

Scholion.

620. Ex aequatione differentiali $dz = Pdx + Qdy$, cuius quidem integrale notum esse assumimus, qua naturam superficiei ATDB expressimus, tota ista superficies perfecte cognoscitur. Sectio enim aquae ABb primo cognoscetur si fiat $z = 0$, quo casu si ponatur PS $= s$, fit $y = s$ atque aequatio $Pdx + Qds = 0$ naturam sectiones aquae seu relationem inter AP $= x$ et PS $= s$ exhibebit. Simili modo quaeuis alia sectio horizontalis innotescet ponendo $z =$ constanti seu $dz = 0$, ex aequatione $Pdx + Qdy = 0$, in qua x abscissam in axe ipsi AC parallelo sumtam et y applicatam denotabit. Quamuis autem pro his omnibus sectionibus eadem prodeat aequatio $Pdx + Qdy = 0$, tamen hinc omnes inter se aequales non sint censendae, cum aequatio $Pdx + Qdy = 0$ sit differentialis et in integratione innumerabiles constantes recipere queat. Pro qualibet autem sectione horizontali integrale formulae $Pdx + Qdy$ aequale poni debet valori ipsius z, seu interuallo, quo quaeque sectio a sectione aquae ABb distat. Semper vero formula differentialis $Pdx + Qdy$ integrationem admittet, quia generaliter est $dz = Pdx + Qdy$ atque P et Q a z non pendere ponuntur, ita vt $Pdx + Qdy$ sit differentiale eius functionis ipsarum x et y, cui z aequatur. Hancobrem P et Q eiusmodi erunt functiones ipsarum x et y, vt si fuerit $dP = Rdx + Sdy$ et $dQ = Tdx + Vdy$, futurum sit $S = T$, vnde generatim nexus inter P et Q inspicitur. Sin autem P et Q

fuerint

fuerint functiones, in quibus x et y vbique eundem dimensionum numerum puta n teneant, erit $Px + Qy = (n+1) z$, vnde immediate ex dato valore ipsius P valor ipsius Q reperitur. Deinde etiam natura plani diametralis verticalis ACD exprimetur ponendo $y = o$, quo casu fit $z = PT = t$, ita vt habeatur inter $AP = x$ et $PT = t$ ista aequatio $dt = Pdx$, posito in P, quae generaliter est functio ipsarum x et y, $y = o$. Natura denique sectionis nauis transuersalis amplissimae BDb habebitur cognita ex aequatione $dx = Pdx + Qdy$ ponendo $x = AC = a$; tum enim ob $CG = y$ et $GH = z$ erit $dz = Qdy$. Quemadmodum autem ex aequatione canonica $dz = Pdx + Qdy$ natura totius superficiei ATDB cognoscitur, ita vicissim ex data superficiei natura aequatio canonica elicietur. Si enim dentur aequationes tum pro sectione aquae ACB, tum pro plano diametrali ATD, tum etiam pro singulis sectionibus transuersalibus SPT, definire licebit longitudinem $MQ = z$, quae ex quouis puncto M sectionis aquae deorsum vsque ad superficiem demittitur; hocque modo z exprimetur per quantitatem ex x, et y ex constantibus compositam, qui valor differentiatus dabit $dz = Pdx + Qdy$ aequationem canonicam naturam superficiei exprimentem. Praecipuas igitur huiusmodi superficierum species in sequentibus problematis euoluemus, atque resistentiam, quam quaeque in aqua directe promota patitur, definiemus; postquam praecipuas species ad aequationem canonicam huius formae $dz = Pdx + Qdy$ reduxerimus.

PROPOSITIO 62.
Problema.

Tab. XXVIII. fig. 2.

621. *Sit pars corporis aquae innatantis, quae in aqua versatur, figura conica* ABDb *basin habens datam* BDb *et verticem in* A *ita vt eius superficies terminetur lineis rectis* HA *ex singulis basis* BD*b punctis ad verticem* A *ductis moueaturque haec figura secundum directionem axis* CAL, *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

In hoc igitur corpore sectio aquae BA*b* erit triangulum isosceles, planum diametrale ACD vero triangulum rectangulum. Deinde quaeuis sectio transuersalis ST*s* basi seu sectioni amplissimae BD*b* parallela erit ipsi basi BD*b* similis. Sit ergo semissis basis CBD, quippe cui altera semissis C*b*D similis est et aequalis, curua quaecunque data ita vt eius natura sit cognita per aequationem inter coordinatas CG et GH. Positis igitur $CG = r$ et $GH = u$, erit u functio quaecunque ipsius r. Ductis iam rectis GA et HA positoque $AC = a$ erit ob triangula similia AC (a) : Ap (x) = CG (r) : PM (y) = GH (u) : MQ (z) vnde erit $y = \frac{rx}{a}$; et $z = \frac{uy}{r} = \frac{ux}{a}$. Sit $du = pdr$, existente p functione quadam ipsius r, erit ob $r = \frac{ay}{x}$; $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$ atque $du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$; vnde fit $dz = \frac{udx}{a} + pdy - \frac{pydx}{x}$, quae aequatio cum generali canonica comparata $dz = Pdx + Qdy$ dat $P = \frac{u}{a} - \frac{py}{x} = \frac{u - pr}{a}$ ob $y = \frac{rx}{a}$ atque $Q = p$; vnde obtinetur $1 + P^2 + Q^2 = 1 + p^2 +$

(u—

$\frac{(u-pr)^2}{aa}$. Ad resistentiam vero definiendam oportet ante omnia sequentia inuenire integralia $\int\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}$; $\int\frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2}$, $\int\frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}$ posito x constante, integralibusque ita sumtis vt euanescant posito $y=0$, ponere $y=PS$ vel $z=0$. At posito x constante est $dy=\frac{xdr}{a}$; vnde fit $\int\frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a}\int\frac{(u-pr^2)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}\int\frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{x}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; atque $\int\frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2}=\frac{xx}{a^3}-\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ quae cum ita fuerint accepta vt euanescant posito $y=0$ seu $r=0$, poni debet $z=0$ seu $u=0$. Quoniam vero ista integralia hoc modo inuenta ab x non pendebunt, erit totalis resistentia qua figura secundum directionem AC retropellitur $=2v\int\frac{xdx}{a^2}\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=v\int\frac{(u-pr)^3dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$; integrali hoc eodem modo accepto quo modo est praeceptum. Simul vero a resistentia corpus hoc conicum sursum vrgebitur vi $=2v\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}=av\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}$ cuius vis directio verticalis transibit per punctum O ita vt sit

$$AO=\frac{\int\frac{xxdx}{a^3}\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{\int\frac{xdx}{a}\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}$$ seu

$$AO=\frac{2\int\frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}{3a\int\frac{(u-pr)^2dr}{a^2+a^2p^2+(u-pr)^2}}.$$ Ex hisque duabus viribus vna cum puncto O cognitis tota resistentiae vis innotescit. Q. E. I.

Coroll. 1.

622. Intelligitur ex formulis inuentis primum quo longius vertex A a basi BDb distet, eo minorem fore vim resistentiae, quam figura patitur; resistentiam vero non tenere rationem quampiam assignabilem pro varietate longitudinis axis AC $=a$.

Coroll.

Coroll. 2.

623. At ſi longitudo AC fuerit vehementer magna vt prae a reliquae quantitates ad baſem BDb pertinentes negligi queant, tum reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC erit $= \frac{v}{a^2} \int \frac{(u-pr)^3 dr}{1+pp}$ vis autem qua ſurſum pelletur $\frac{v}{a} \int \frac{(u-pr)^2 dr}{1+pp}$, cuius directio tranſibit per punctum O exiſtente AO $= \frac{2}{3} a$.

Coroll. 3.

624. Hoc ergo caſu vis reſiſtentiae corpus retropellentis in directione AC reciproce ſe habebit vt quadratum longitudinis coni AC. At vis ſurſum pellens rationem tenebit reciprocam longitudinis coni: ſcilicet ſi longitudo coni fuerit vehementer magna.

Coroll. 4.

625. Cum area baſis BDb ſit $= 2\int u dr$ poſito poſt integrationem $r = $ CB ſeu $u = 0$, erit reſiſtentia, quam baſis pateretur, ſi directe ſecundum CA eadem celeritate in aqua moueretur $= 2v\int u dr$, eiusque directio eſſet normalis ad baſin et per eius centrum grauitatis tranſiret.

Coroll. 5.

626. Idem vero caſus, quo ſola baſis promouetur, obtinetur ſi fiat $a = 0$. Tum autem reſiſtentiae vis ſurſum vrgens euaneſcit, vis autem retroagens erit $= v\int (u-pr) dr = v\int u dr - v\int r du$. At ſi poſt integrationem ita peractam vt prodeat nihil, ſi ponatur $r = 0$, ponatur $u = 0$, tum eſt $\int r du = -\int u dr$, ex quo reſiſtentia retropellens prodit $= 2v\int ur d$.

Coroll.

Coroll. 6.

627. Tota ſuperficies huius corporis eſt $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ (610). Sit vero $\int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)} = \int \frac{dy}{a} \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$, quae cum ponatur x conſtans abit in $\frac{x}{a^2} \int dr \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$; vnde tota ſuperficies prodit $= \int dr \sqrt{(a^2 + a^2p^2 + (u - pr)^2)}$ poſito poſt integrationem poſtremam $x = a$.

Coroll. 7.

628. Cum denique ſoliditas ſit $= 2\int - dx \int Q y\, dy$ (617) ob $Q = p$ et $y = \frac{rx}{a}$, fiet ea $= 2\int - dx \int \frac{x^2 pr\, dr}{aa} = 2\int - \frac{xx dx}{aa} \int r\, du = \frac{2}{3} a \int u\, dr$ denotante $\int u\, dr$ aream BCD; id quod quidem vltro patet ex elementis Geometriae.

Scholion 1.

629. In hac ergo propoſitione primam atque facillimam corporum ſpeciem examini ſubiecimus, quae omnis generis corpora conoidica ſub ſe complectitur: non ſolum enim conus rectus qui baſin habet circularem in ea continetur, ſed etiam coni obliqui, quippe qui ad rectos reduci poſſunt ſumta quapiam ſectione conica pro baſi, deinde etiam generaliter huc pertinent omnia corpora, quae ex data quacunque baſe ad punctum quoddam ſublime ductis lineis rectis generantur, quorſum praeter conos baſes curuilineas habentes etiam pyramides pertinent. Hic autem ſecundum noſtrum inſtitutum eiusmodi tantum corpora conoidica conſideramus, quae duas habent partes ſimiles et aequales ex vtraque plani diametralis parte ſitas, quo tota tractatio nauibus maxime ſit accommodata. Cum

vero rem tam generaliter concipiendo formulae super sin integrales, de quarum integratione non constat, iuuabit casus quosdam speciales euoluere, quibus data figura determinata pro basi BDb accipitur.

Exemplum I.

Tab. XXIX. fig. 1.

630. Sit pars aquae submersa quae resistentiam sentit pyramis triangularis ABDb cuius basis seu sectio amplissima BDb est triangulum isosceles, in quo sit $CB = Cb = b$ et $CD = c$. Posito ergo $CG = r$ et $GH = u$, erit $c : u = b : b - r$, hincque $u = c - \frac{cr}{b}$. et $du = -\frac{cdr}{b}$; vnde fit $p = -\frac{c}{b}$. Si nunc haec pyramis directe progrediatur secundum directionem AL celeritate debita altitudini v, atque longitudo AC ponatur $= a$, reperietur ob $u - pr = c$ et $aa + aapp = \frac{aa(bb+cc)}{bb}$ resistentiae vis in directione AC retropellens $= v \int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2 + a^2 p^2 + (u-pr)^2} = v \int \frac{b^2 c^3 dr}{aa(bb+cc)+bbcc}$ vnde post integrationem posito $r = b$ prodit ista resistentiae vis motui directe contraria $= \frac{b^3 c^3 v}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$. Deinde cum sit $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2 + a^2 p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^2 c^2 dr}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$ erit vis resistentiae verticaliter sursum urgens $= \frac{ab^3 c^2 v}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$, cuius directio transibit per punctum O existente $AO = \frac{2\int (aa+cu) dr}{3ab} = \frac{2aa+cc}{3a}$. Soliditas vero totius huius pyramidis ABDb erit $= \frac{2a}{3} \int u dr = \frac{abc}{3}$; superficies vero in aquam irruens seu duo triangula ABD et AbD $= \int dr \surd (aa + aapp + (u-pr)^2) = \surd (aabb + aacc + bbcc)$.

Corol.

Coroll. 1.

631. Cum igitur basis BDb sit $= bc$; et superficies in aquam impingens $= \sqrt{(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$, erit resistentia motum retardans aequalis altitudini celeritati debitae ducta in cubum basis et diuisae per quadratum superficiei.

Coroll. 2.

632. Manente igitur basi BDb, eadem resistentia eo erit minor, quo maior fuerit superficies corporis, quae ab aqua resistentiam patitur; est enim resistentia motui contraria reciproce vt quadratum superficiei.

Coroll. 3.

633. Ponatur basis BDb constans seu $bc = ff$, vt sit $c = \frac{ff}{b}$, erit resistentia motum retardans $= \frac{bbf^6v}{a^2b^4 + a^2f^4 + bbf^4}$ vnde intelligitur resistentiam fore minimam, si vel b vel c maximam habuerit quantitatem, maxima autem erit resistentia si fuerit $b = c$.

Coroll. 4.

634. Cum in hoc casu tam ff quam a positum sit constans, atque $\frac{1}{3}aff$ denotet soliditatem figurae, patet inter omnes pyramides triangulares quae aequales bases et altitudines habent eam maximam pati resistentiam, cuius basis sit triangulum isosceles ad D rectangulum.

Coroll. 5.

635. Quo magis igitur angulus BDb differt a recto, eo minorem pyramis in motu suo sentiet resistentiam;

ceteris paribus. Scilicet manentibus tum basi tum longitudine eiusdem quantitatis.

Coroll. 6.

636. Si basis BDb nuda contra aquam directe impingat eadem celeritate altitudini v debita, resistentiam sentiret $= bcv$. Ex quo resistentia pyramidis se habebit ad resistentiam basis vt b^2c^2 ad $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$; vnde intelligitur resistentiam basis eo esse maiorem resistentia pyramidis quo maior sit eius altitudo a.

Coroll. 7.

637. Manente autem latitudine basis Bb et soliditate pyramidis eiusdem quantitatis, resistentia eo erit minor, quo minor fuerit profunditas CD$=c$, seu quo longior capiatur pyramidis longitudo AC.

Coroll. 8.

638. Denique notandum est vim resistentiae qua corpus sursum pellitur et ex aqua eleuatur se habere ad vim resistentiae motui contrariam vt se habet a ad c hoc est vt AC ad CD. Vnde pyramis eo magis sursum pelletur, quo longior sit eius axis AC, seu quo fuerit acutior cuspis in A.

Exemplum 2.

Tab. XXVIII. fig. 2.

639. Abeat corpus nostrum conoidicum in semi conum rectum, ita vt tam basis BDb quam omnes sectiones ipsi parallelae STs sint semicirculi. Ponatur autem huius coni altitudo AC$=a$, quae simul est directio secun-

cundum quam hic conus mouetur celeritate altitudini v debita. Posito igitur basis BDb semidiametro $BC = CD = b$, erit ob $CG = r$ et $GH = u$ ex natura circuli $u = \sqrt{(bb-rr)}$; vnde fit $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, et $1+pp = \frac{bb}{bb-rr}$ atque $u - pr = \frac{bb}{\sqrt{(bb-rr)}}$. Ex his fit $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2(1+pp)+(u-pr)^2} = \int \frac{b^4 dr}{(a^2+b^2)\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b^4}{(2a^2+2b^2)}$ posito post integrationem $r=b$, et denotante $\pi : 1$ rationem peripheriae ad diametrum. Quamobrem resistentiae vis, quae vrget secundum directionem horizontalem AC erit $= \frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$. Porro cum sit $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr^2)} = \int \frac{b^2 dr}{a^2+b^2} = \frac{b^3}{a^2+b^2}$ atque $\int \frac{(u-pr)^2(a^2+u^2-pru)dr}{a^2(1+p^2)+(u-pr)^2} = \int bbdr = b^3$ erit resistentiae vis corpus verticaliter sursum pellens $= \frac{ab^3 v}{a^2+b^2}$, huiusque vis directio transibit per punctum O, ita vt sit $AO = \frac{2aa+2bb}{3a}$. Soliditas ceterum huius corporis erit $= \frac{2a}{3}\int dr \sqrt{(bb-rr)} = \frac{\pi abb}{6}$ atque superficies conica, quae resistentiam sentit prodibit $= \int \frac{bdr\sqrt{(aa+bb)}}{\sqrt{(bb-rr)}} = \frac{\pi b}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, quae quidem facillime ex notis coni proprietatibus deducuntur.

Coroll. 1.

640. Cum basis semiconi seu semicirculus BDb sit $= \frac{\pi bb}{2}$, si ea moueretur in eadem directione CA in aqua foret eius resistentia $= \frac{\pi bbv}{2}$. Vnde resistentia ipsius coni se habebit ad resistentiam basis ut b^2 ad $a^2 + b^2$ hoc est ut CD^2 ad AD^2.

Coroll. 2.

641. Mutetur semicirculus BDb in triangulum isosceles aeque capax, conusque abibit in pyramidem cuius

 lon-

longitudo a ſit eadem. Poſitis autem dimidia latitudine baſis huius pyramidis, $CB = b$, et altitudine $CD = \gamma$ erit $\beta\gamma = \frac{\pi b^2}{2}$; et reſiſtentia pyramidis huius erit $\frac{\beta^3\gamma^3 v}{a^2\beta^2 + a^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}$

Coroll. 3.

642. Cum igitur ſit $bb = \frac{2\beta\gamma}{\pi}$, erit reſiſtentia coni aeque alti et aeque capacis $= \frac{2\beta^2\gamma^2 v}{\pi a^2 + 2\beta\gamma}$, vnde reſiſtentia coni ſe habebit ad reſiſtentiam pyramidis aequalis altitudinis et baſis vt $2a^2\beta^2 + 2a^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2$ ad $\pi a^2\beta\gamma + 2\beta^2\gamma^2$.

Coroll. 4.

643. Reſiſtentia ergo coni aequalis erit reſiſtentiae pyramidis eiusdem baſis eiusdemque altitudinis, ſi fuerit $\beta^2 + \gamma^2 = \frac{\pi\beta\gamma}{2}$ ſeu $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{(\frac{\pi^2}{16} - 1)}$ hoc eſt nunquam. Quare reſiſtentia coni ſemper maior eſt quam reſiſtentia pyramidis.

Exemplum 3.

Tab. XXVIII. fig. 2.

644. Sit nunc baſis coni BDb ſemiellipſis centro C deſcripta, quo caſu figura abibit in conum ſcalenum. Sed ponatur $CB = Cb = b$, et $CD = c$, erit ex natura ellipſis $u = \frac{c}{b}\sqrt{(bb - rr)}$, vnde fit $p = \frac{-cr}{b\sqrt{(bb-rr)}}$ et $1 + pp = \frac{b^4 + (cc - bb)rr}{b^2(b^2 - rr)}$ atque $u - pr = \frac{bc}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hincque $a^2(1 + pp) + (u - pr)^2 = \frac{a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr}{b^2(bb-rr)}$. Ex his reperitur $\int \frac{(u-pr)^3 dr}{a^2 + a^2p^2 + (u-pr)^2} = \int \frac{b^5c^3 dr}{(a^2b^4 + b^4c^2 + a^2(cc-bb)rr)\sqrt{(b^2-r^2)}}$ cuius integrale poſito $r = b$ eſt $= \frac{\pi b^2c^2}{c\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$; vnde reſiſtentiae vis, quae motum retardat et in directione AC vrget eſt $= \frac{\pi b^2c^2 v}{2\sqrt{(aa+bb)(aa+cc)}}$. Deinde eſt $\int \frac{(u-pr)^2 dr}{a^2 + a^2p^2 + (a-pr)^2} = \int \frac{b^4c^2 dr}{b^4(a^2+c^2) + a^2(c^2-b^2)r^2}$

cuius

cuius integrale a quadratura circuli pendebit si $c > b$, at si $c < b$ pendebit a logarithmis. Cum autem ad nostrum institutum non multum pertineat, quantum corpus sursum vrgeatur a resistentia, et in quanam directione, huic investigationi operam non impendemus; sed sufficiat veram resistentiam, qua motus retardatur, determinasse.

Coroll. 1.

645. Quoniam in expressione resistentiae inuenta $\frac{\pi b^2 c^2 v}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$. semiaxes coniugati basis b et c aequaliter insunt, *ii* inter se commutari possunt manente eadem resistentia. Hoc est dummodo ellipsis BDb alter semiaxis sit b alter vero c resistentia prodit eadem.

Coroll. 2.

646. Si area basis BDb quae est $\frac{\pi bc}{2}$ dicatur $=$ A, ob $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} =$ sinui ang. CAB et $\frac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}} =$ sin. ang. CAD, erit resistentia $=$ Av sin. CAB. sin. CAD; vbi notandum Av exprimere resistentiam basis BDb si ea nuda in directione CA promoueretur.

Coroll. 3.

647. Si loco ellipsis BDb substituatur circulus eiusdem areae, erit eius radius $= \sqrt{bc}$, atque resistentia, quam hic conus patietur erit $= \frac{\pi b^2 c^2 v}{2(a^2+bc)}$. Resistentia igitur coni circularis se habebit ad resistentiam coni elliptici aequalis basis aequalisque altitudinis vt $\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$ ad a^2+bc.

Coroll. 4.

648. Nisi ergo sit $b=c$, resistentia coni circularis semper erit maior quam resistentia coni elliptici. Sumtis enim quadratis perspicuum est esse $a^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 > a^4+2a^2bc+bbcc$, quia semper est $bb+cc>2bc$, nisi sit $b=c$.

Coroll. 5.

649. Manente ergo area basis elliptica BDb et altitudine coni AC eadem, resistentia erit maxima, si basis abeat in semicirculum. Eo minor igitur erit resistentia, quo maior inaequalitas inter altitudinem et latitudinem basis intercedet.

Scholion 2.

650. Ex his igitur satis perspicuum est corpus conoidicum, quod minimam patiatur resistentiam in finitis assignari non posse. Nam si altitudo coni a maneat constans, resistentia eo minor euadet, quo minor accipiatur basis BDb ceteris paribus. At si insuper basi data area tribuatur, resistentia semper magis diminui potest inaequalitatem inter eius altitudinem CD et latitudinem CB maiorem ponendo. Hancobrem istud problema non attingemus, quo vel inter omnes conos absolute, vel inter aequicapaces tantum is desideretur qui minimam patiatur resistentiam. Ad alias igitur corporum species progrediamur et quomodo resistentia se in iis habeat, inquiramus. Eiusmodi vero adhuc contemplabimur corporum figuras, in quibus unica curua maneat indeterminata, quemadmodum euenit in his corporibus conoidicis in quibus sola basis supererat indeterminata.

PRO-

PROPOSITIO 63.

Problema.

651. *Sit partis submersae nauis pars anterior in motu directo resistentiam patiens cono-cuneus latissimo sensu acceptus* AEDHBbbD, *ex data curua tanquam basi* BDb *et recta verticali* AFE *ita generatus vt eius superficies terminetur rectis horizontalibus* HF, bF *ex singulis perimetri basis* BDb *punctis ad rectam* AE *ductis; haecque figura cursu directo in aqua progrediatur secundum directionem axis* CAL: *determinare resistentiam quam patietur*

Tab. XXIX. fig. 2.

Solutio.

In hac igitur figura planum verticale diametrale ACDE erit parallelogrammum rectangulum, atque sectio aquae ABb triangulum isosceles; similique modo omnes sectiones horizontales FHb erunt triangula aequicrura. Porro ex constructione apparet omnes sectiones verticales per rectam AE factas, cuius modi est AGHF esse parallelogramma rectangula. Tota ergo figura in prora desinit in aciem rectilineam verticalem AFE; amplissima autem sectio verticalis axi AC normalis erit basis huius cono-cunei BDb, a cuius natura totius figurae natura pendet. Posita ergo longitudine $AC = a$, sumatur in basi abscissa $CG = r$ et applicata $GH = u$, atque ob basin datam dabitur aequatio inter u et r, seu u per r. Sit autem $du = pdr$, et quantitas p erit cognita per r. Concipiatur nunc sectio verticalis STs basi parallela, pro qua sit $AP = x$, et per GH et AE alia fiat sectio AGHF, quae erit rectangulum, eiusque latus HF in superficie figurae erit situm. Positis ergo $PM = y$ et $MQ = z$ erit $z =$

 GH

GH $= u$, atque $x : y = a : r$, vnde fit $y = \frac{rx}{a}$. Ex his reperitur $dr = \frac{axdy - aydx}{xx}$, et $dz = du = \frac{apxdy - apydx}{xx}$. Pro superficie igitur huius cono-cunei ista habetur aequatio $dZ = \frac{-apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$, qua cum aequatione canonica $dZ = Pdx + Qdy$ comparata dat $P = \frac{-apy}{xx} = \frac{-pr}{x}$, ob $y = \frac{rx}{u}$ atque $Q = \frac{ap}{x}$. Hinc oritur $1 + P^2 + Q^2 = \frac{x^2 + p^2(a^2 + r^2)}{x^2}$, atque formulae integrales propositionis 61. in quibus positum est x constans in sequentes transmutantur, ob $dy = \frac{xdr}{a}$ quia x est constans: scilicet fit $\int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = -\int \frac{p^3r^3dr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$; et $\int \frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2r^2xdr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$ atque cum sit $x + Pz = x - \frac{pru}{x}$ erit $\int \frac{P^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2r^2(xx - pru)dr}{axx + ap^3(a^2+r^2)}$ quae integralia ita sunt accipienda posito x constante, vt euanescant posito $r = 0$, tum vero poni debet $r =$ CB seu $u = 0$. Ad resistentiam deinde ipsam inueniendam sumi debet hoc integrale $\int dx \int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = -\int \frac{dx}{a} \int \frac{p^3r^2dr}{xx + p^2(a^2+r^2)}$. At quoniam post integrationem posterioris formulae r et p ab x non pendebunt, quaestio huc est reducta vt $\frac{-p^3r^3drdx}{ax^2 + ap^2(a^2+r^2)}$ bis integretur ponendo in altera integratione x in altera vero r et p constantes; perinde autem est ab vtra integratione initium fiat. Quare ponamus primo p et r constantes eritque integrale $\frac{-p^2r^3dr}{a\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ posito post integrationem vti oportet $x = a$. Integratione ergo altera instituta et postea posito $r =$ CB seu $u = 0$, prodibit $\int dx \int \frac{P^3dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{-P^2r^3dr}{a\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$. Hancobrem si cono-cuneus moueatur secundum directionem axis CAL celeritate altitudini v debita, erit resistentiae vis, qua secundum directionem AC repelletur $= \frac{-2v}{a} \int \frac{p^2r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a}{p\sqrt{(a^2+r^2)}}$ simili modo integrationes absoluendo erit $\int dx \int \frac{P^2dy}{1+P^2+Q^2} =$

$\iint \frac{p^2 r x^2 dx dr}{axx + ap^2(a^2+r^2)}$, vbi bis integrari oportet, altera vice x altera vero r et p ponendo conſtantes; poſito igitur primo r conſtante, erit $\int dx \int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \int \frac{p^2 r^2 dr}{a} \,l\, \frac{\surd(a^2+p^2(a^2+r^2))}{p\surd(a^2+r^2)}$ $= \int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \,l\, \frac{a^2+a^2p^2+p^2r^2}{a^2p^2+p^2r^2}$. Facto ergo poſt integrationem $r =$ CB ſeu $u = 0$ prodibit vis reſiſtentiae, qua corpus verticaliter ſurſum vrgebitur $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \,l\, \frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)}$. Denique ad locum applicationis huius vis, qui ſit in O inueniendum bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{p^2 r^2 (x^2 - pru) dx dr}{axx + app(aa+rr)}$. Ponatur primo x tantum variabile, poſitoque poſt integrationem $x = a$ habebitur pro altera integratione $\int p^2 r^2 dr \left(1 - \frac{(p(a^2+r^2)+ru)}{a\surd(a^2+r^2)} \text{A tang.} \frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}\right)$; quod integrale, cum poſitum fuerit $u = 0$, diuiſum per integrale ante inuentum $\int \frac{p^2 r^2 dr}{2a} \,l\, \frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)}$ dabit diſtantiam AO puncti O, per quod reſiſtentiae vis verticalis tranſit a prora A. Q. E. I.

Coroll. 1.

652. Quaecunque ergo curua pro baſi BDb accipiatur, reſiſtentiae motui contrariae determinatio, quae eſt $= \frac{-2v}{a} \int \frac{p^2 c^3 dr}{\surd(a^2+r^2)} \text{A tang.} \frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}$ quadraturam circuli requirit. At contra reſiſtentiae vis, quae ſurſum vrget pendet a logarithmis.

Coroll. 2.

653. Ex his formulis etiam perſpicitur vtramque reſiſtentiae vim eo fore minorem quo maior ſit longitudo; vtraqne etim euaneſcit ſi ponatur $a = \infty$. Magis vero dum creſcit a, decreſcit vis reſiſtentiae horizontalis quam verticalis.

Coroll.

Coroll. 3.

654. Si longitudo $AC = a$ fuerit tam magna respectu basis BDb, vt p et r prae a euanescant erit resistentiae vis horizontalis $= \frac{-2v}{aa} \int p^2 r^3 dr$. A tang. $\frac{1}{p}$ resistentiae vero vis verticalis erit $= \frac{v}{a} \int p^2 r^2 dr \left(\frac{1+pp}{pp}\right.$.

Coroll. 4.

655. At si longitudo $AC = a$ euanescat vt tota figura abeat in solam basem BDb tum resistentia horizontalis fiet $= \frac{-2v}{a} \int p^2 r^2 dr$ A tang. $\frac{a}{pr} = -2v \int prdr = 2v \int udr$, prout per se patet; at resistentia verticalis euanescet.

Coroll. 5.

656. Soliditas totius huius cono-cunei reperitur ex §. 617. quippe quae est $2\int -dx \int Qydy = 2\int -dx \int \frac{xprdr}{a}$. Quae cum x in priore integratione sit constans, abit in $-2\int \frac{xdx}{a} \int prdr = \int \frac{2xdx}{a} \int udr$, denotatque $\int udr$ aream CBD. Vnde tota soliditas $= a\int udr$, quae quidem sponte patet.

Coroll. 6.

657. Superficies autem huius cono-cunei in aquam incurrentis est ex §. 616. $= 2\int dx \int dy \surd (1 + P^2 + Q^2) = 2\int dx \int \frac{dr}{a} \surd (x^2 + p^2(a^2 + r^2))$. Vnde bis integrari debet haec formula differentialis $\frac{2dxdr}{a} \surd (x^2 + p^2(a^2 + r^2))$, altera vice x altera r ponendo constans. Si autem primo r ponatur constans, erit integrale $\frac{xdr}{a} \surd (x^2 + p^s(a + r^2)) + \frac{p^2dr(a^2+r^2)}{a} \left(\frac{x + \surd(x^2+p^2\ a^2+r^2))}{p\surd(a^2+r^2)}\right.$. Posito igitur $x = a$, erit

erit ſuperficies cono-cunei quaeſita $= \int dr \surd (a^2 + p^2(a^2 + r^2)) + \int \frac{p^2 dr (a^2 + r^2)}{a} \left(\frac{a + \surd(a^2 + p^2 (a^2 + r^2))}{p \surd(aa + rr)} \right)$.

Coroll. 7.

658. Inuentio ergo ſuperficierum cono-cunei cuiuscunque pendet a logarithmis ſeu quadratura hyperbolae, atque inſuper ab aliis quadraturis, niſi formulae illae differentiales integrationem admittant.

Scholion.

659. Quamuis huiusmodi figurae, quas hic cono-cunei nomine appellamus, non ita pridem conſiderari coeperint, eas tamen hic tanquam ſecundam corporum ſpeciem proferre viſum eſt, quoniam magnam habent affinitatem cum corporibus conicis, quae nobis primam ſpeciem conſtituerunt. Quanquam enim, ſi ſimplicitatem conſtructionis ſpectemus, corpora cylindrica et priſmatica primo loco collocari merentur, tamen eas hic prorſus ne quidem attingemus, cum reſiſtentia, quam patiuntur, ex praecedentibus, quae de figuris planis ſunt prolata, facillime innoteſcat, ibique iam indicata ſit. Nam ſi omnes ſectiones horizontales ſunt inter ſe ſimiles et aequales, reſiſtentia obtinebitur ex reſiſtentia vnicae ſectionis, eam ducendo in altitudinem figurae. At ſi omnes ſectiones plano diametrali parallelae fuerint inter ſe aequales et ſimiles, tum pariter reſiſtentia habebitur reſiſtentiam vnicae ſectionis hanc per latitudinem multiplicando, quemadmodum attendenti ſponte patebit. Hic autem vocabulum cono-cunei in latiore ſenſu accipimus, quam Walliſius, curuam

 enim

enim quamcunque basis BDb loco contemplamur, cum Wallisius circulum tantum assumserit. Generatim autem omnium horum cono-cuneorum natura cognoscetur ex aequatione canonica inuenta $dz = -\frac{apydx}{xx} + \frac{apdy}{x}$ in qua cum sit p functio quaecunque ipsius r et $r = \frac{ay}{x}$, fiet p functio quaecunque ipsarum x et y nullius dimensionis. Quare pro cono-cuneis erit $dz = -\frac{ap\,ydx-xdy)}{xx}$, et cum sit $\frac{xdy-ydx}{xx} = d.\frac{y}{x}$ aequabitur z functioni nullius dimensionis ipsarum x et y. Vnde ex quaque oblata aequatione pro quapiam superficie perspici poterit vtrum figura sit cono-cuneus an secus. Similiter natura corporum conicorum innotescet ex aequatione canonica supra inuenta $dz = \frac{udx}{a} - \frac{pydx}{x} + pdy$, quae cum sit $u = \frac{az}{x}$ abit in hanc $\frac{dz}{x} - \frac{zdx}{xx} = \frac{pdy}{x} - \frac{pydx}{xx}$. Quoniam vero ob $r = \frac{ay}{x}$ est p functio quaecunque nullius dimensionis ipsarum x et y, erit $z =$ producto ex x in functionem nullius dimensionis ipsarum x et y. Quoties igitur $\frac{z}{x}$ aequatur functioni nullius dimensionis ipsarum x et y toties aequatio erit pro superficie conica. Omnis ergo aequatio inter x et y et z, in qua hae tres variabiles vbique eundem dimensionum numerum constituunt, naturam exprimet coni cuiusdam. At omnis aequatio inter x, y et z ita comparata vt tantum binae variabiles x et y vbique eundem dimensionum numerum adimpleant, superficiem cono-cunei cuiusdam exhibebit.

Exemplum 1.

660. Abeat basis BDb cono-cunei in triangulum Isosceles, quo casu corpus ABDb mixtum erit ex pyramide

mide et cuneo. Sit ſemi-latitudo huius baſis CB $= Cb = b$, et altitudo CD $= c$, erit $u = c - \frac{cr}{b}$, atque $p = -\frac{c}{b}$. Cum igitur reſiſtentiae, quam hoc corpus celeritate altitudini v debita ſecundum directionem CA promotum patitur, vis retrourgens in directione A C inuenta ſit $= \frac{-2v}{a}\int\frac{p^2r^3dr}{\surd(a^2+r^2)}\text{A tang.}\frac{a}{p\surd(a^2+r^2)}$ fiet ea hoc caſu $= \frac{2c^2v}{ab^2}\int\frac{r^3dr}{\surd(a^2+r^2)}\text{A tang.}\frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)}$. Cum autem ſit $\int\frac{r^3dr}{\surd(a^2+r^2)} = \frac{2a^3}{3} + \frac{(r^2-2a^2)\surd(a^2+r^2)}{3}$ erit $\int\frac{r^3dr}{\surd(a^2+r^2)}\text{A tang.}\frac{ab}{(c\surd a^2+r^2)} = \frac{(r^2-2a^2)\surd(a^2+r^2)}{3}$ $\text{A tang.}\frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)} + \frac{abc}{3}\int\frac{rdr(r^2-2a^2)}{a^2c^2+a^2b^2+c^2r^2} = \frac{(r^2-2a^2(\surd(a^2+r^2)}{3}$ A tang.$\frac{ab}{c\surd(a^2+r^2)} + \frac{abr^2}{6c} - \frac{a^3b(bb+3cc)}{3c^3}\,\ell\frac{cr+\surd)a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2)}{a\surd(bb+cc)} + \frac{2a^3}{3}$ A tang.$\frac{b}{c}$; tali addita conſtante, vt prodeat nihil poſito $r=0$. Fiat nunc $r=b$, atque integra reſiſtentia quam figura in directione AC ſentiet, erit $= \frac{2ccv(bb-2aa)\surd(a^2+b^2)}{3ab^2}$ A tang.$\frac{ab}{c\surd(a^2+b^2)} + \frac{bcv}{3} - \frac{2a^2v(bb+3cc)}{3bc}\,\ell\frac{bc+\surd(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{a\surd(b^2+c^2)} + \frac{4a^2c^2v}{3bb}$ A tang.$\frac{b}{c}$. Deinde vis reſiſtentiae quae ſurſum vrget eſt $= \frac{v}{a}\int p^2r^2dr\,\ell\frac{a^2+p^2(a^2+r^2)}{p^2(a^2+r^2)} = \frac{ccv}{abb}\int r^2dr\,\ell\frac{a^2b^2+a^2c^2+c^2r^2}{cc(a^2+r^2)}$ quae expreſſio commodius exhiberi non poteſt, quamobrem ſufficiat reſiſtentiam, qua motus retardatur, quippe ad quam potiſſimum attendemus, determinaſſe per quantitates finitas.

Coroll. 1.

661. Si longitudo AC $= a$ fuerit vehementer magna prae b et c reſiſtentia commodius ex formula differentiali eruetur quae abibit in hanc $\frac{2ccv}{a^2b^2}\int r^3dr$ A tang. $\frac{b}{c}$, cuius integrale poſito $r=b$ eſt $= \frac{b^2c^2v}{2a^2}$ A tang. $\frac{b}{c}$; quae eſt reſiſtentia retardans.

 Co-

Coroll 2.

662. Si igitur detur area basis B D b, quae est bc, et longitudo A C fuerit perquam magna, resistentia eo erit minor, quo minor fuerit fractio $\frac{b}{c}$, hoc est quo acutior fuerit angulus BDb. Maxima vero erit resistentia, si capiatur ratio $b:c$ infinita magna, quo tamen casu resistentia erit finita ob A tang. $\infty = \frac{\pi}{2}$.

Coroll. 3.

663. Per seriem etiam commode resistentia exprimi potest generaliter pro quauis longitudine a. Cum enim sit A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = \frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} - \frac{a^3b^3}{3c^3(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^5b^5}{5c^5(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} -$ etc. erit, posito post integtationem $r=b$ resistentia $\frac{2c^2v}{abb}\int\frac{r^3dr}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}} = v\left(bc - \frac{2a^2(b^2+3c^2)}{3bc}\left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a^2b}\right.\right. - \frac{a^4b(3bb+5cc)}{1\cdot3\cdot5\cdot c^3(a^2+b^2)} + \frac{a^6b^3(5bb+7cc)}{2\cdot5\cdot7c^5(a^2+b^2)^2} - \frac{a^8b^5(7bb+9cc)}{3\cdot7\cdot9\,c^7(a^2+b^2)^3} + \frac{a^{10}b^7(9bb+11cc)}{4\cdot9\cdot11\,c^9(a^2+b^2)^4} -$ etc. quae vehementer conuergit si fuerit a valde paruum.

Coroll. 4.

664. Si autem series desideretur, quae vehementer conuergat, si sit a quantitas valde magna, reperietur resistentia motum retardans $= \frac{4a^2c^2v}{3bb}$ Atang. $\frac{b}{c} - \frac{2ccv(2a^2-b^2)\sqrt{(a^2+b^2)}}{3ab^2}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+b^2)}} - \frac{2bc^3v}{3(bb+cc)} + \frac{v(b^2+3c^2)}{3bc}\left(\frac{b^4c^4}{2a^2(b^2+c^2)^2} - \frac{b^6c^6}{3a^4(b^2+c^2)^3} + \frac{b^8c^8}{4a^6(b^2+c^2)^4} -\right.$ etc.

Co-

Coroll. 5.

665. Soliditas vero huius corporis reperitur $= \frac{abc}{2}$, ſuperficies autem eius baſi et ſectione aquae exceptis erit $= \int \frac{dr}{b} \sqrt{(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2)} + \frac{cc}{abb} \int dr\,(a^2 + r^2)\,\ell\frac{ab + \sqrt{(a^2b^2 + a^2c^2 + c^2r^2)}}{c\sqrt{(a^2 + r^2)}}$. Cuius integrale poſito $\frac{bb + cc}{cc} = m$, et facto $r = b$, reperitur $= \frac{c}{2}\sqrt{(ma^2 + b^2)} + \frac{ma^2c}{2b}\,\ell\frac{b + \sqrt{(ma^2 + b^2)}}{a\sqrt{m}} + \frac{cc(3aa + bb)}{3ab}\,\ell\frac{ab + c\sqrt{(ma^2 + b^2)}}{c\sqrt{(a^2 + b^2)}} + \frac{cc}{3bb}\int\frac{(3a^2 + r^2)((m-1)ac + b\sqrt{(ma^2 + r^2)})r^2dr}{(a^2 + r^2)(ab + c\sqrt{(ma^2 + r^2)})\sqrt{(ma^2 + r^2)}}$ adeo vt integratio huius formulae reſtet.

Coroll. 6.

666. Caſus quo $m = 2$ ſeu $b = c$ aliquanto fit ſimplicior, prodit enim ſuperficies $= \frac{c}{2}\sqrt{(2a^2 + c^2)} + a^2\,\ell\frac{c + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{a\sqrt{2}} + \frac{c(5a^2 + c^2)}{3a}\,\ell\frac{a + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{\sqrt{(a^2 + c^2)}} + \frac{1}{3}\int\frac{(3a^2 + r^2)r^2dr}{(a^2 + r^2)\sqrt{(2a^2 + r^2)}} = \frac{c}{2}\sqrt{(3a^2 + c^2} + a^2\,\ell\frac{c + \sqrt{(2a^2 + c^4)}}{a\sqrt{2}} + \frac{c(3a^2 + c^2)}{3a}\,\ell\frac{a + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{\sqrt{(a^2 + c^2)}} + \frac{c}{6}\sqrt{(3a^2 + c^2)} + \frac{aa}{3}\,\ell\frac{c + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{a\sqrt{2}} - \frac{2a^2}{3}\,\text{A tang.}\frac{c}{\sqrt{(2a^2 + c^2)}}$. Erit ergo ſuperficies quaeſita $= \frac{2c}{3}\sqrt{(2a^2 + c^2)} + \frac{4a^2}{3}\,\ell\frac{c + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{a\sqrt{2}} + \frac{c(3a^2 + c^2)}{3a}\,\ell\frac{a + \sqrt{(2a^2 + c^2)}}{\sqrt{(a^2 + c^2)}} - \frac{2a^2}{3}\,\text{A tang.}\frac{c}{\sqrt{(2a^2 + c^2)}}$.

Coroll. 7.

667. Si inſuper ſit $c = a$; ita vt ſit $AC = CB = CD$ erit ſuperficies $= \frac{2aa}{\sqrt{3}} + \frac{4aa}{3}\,\ell(2 + \sqrt{3}) - \frac{\pi a^2}{9}$; cuius expreſſionis valor proximus eſt $a^2 . 2,56156$, ſeu ſuperficies ſe habet ad baſem proxime vt $2\frac{1}{2}$ ad 1.

Exemplum 2.

668. Sit nunc corpus noſtrum Walliſii cono-cuneus, ſeu baſis BDb, abeat in ſemicirculum, cuius ſemidiame-

diameter ſit $CB = CD = b$. Erit igitur $u = \sqrt{(b^2 - r^2)}$, ideoque $p = \frac{-r}{\sqrt{(bb-rr)}}$, hoc ergo valore ſubſtituto, inuenietur reſiſtentiae vis motum retardans $= \frac{2v}{a} \int \frac{r^5 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{a\sqrt{(bb-rr)}}{r\sqrt{(aa+rr)}}$. Quamuis autem ſit $\int \frac{r^5 dr}{(b^2-r^2)\sqrt{(a^2+r^2)}} =$

$$\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + (a^2-b^2)\sqrt{(a^2+r^2)} + \frac{b^4}{2\sqrt{(a^2+b^2)}} \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)} + \sqrt{(a^2+r^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)} - \sqrt{(a^2+r^2)}} \right)$$

tamen hinc plenaria integratio non multum iuuatur. Deinde ſi arcus cuius tangens eſt $\frac{a\sqrt{b^2-r^2}}{r\sqrt{a^2+r^2}}$ in ſeriem reſoluatur, integratio quidem ſingulorum terminorum in $\frac{r^5 dr}{(b^2-r^2\sqrt{a^2+r^2})}$ ductorum facilior euaderet, ſed conſtans infinita eſſet addenda, quo prodeat nihil poſito $r = 0$. Hoc incommodum quodammodo euitatur ſi loco illius arcus, ſubſtituatur aequiualens $\frac{\pi}{2}$ − A tang. $\frac{r\sqrt{a^2+r^2}}{a\sqrt{bb-rr}}$, ſed quomodocunque calculus inſtituatur; nihil, cuius operae foret pretium deriuatur, quapropter cono-cuneos relinquamus, ad aliam corporum ſpeciem plurimum iam pertractatam, corporum ſcilicet rotundorum progreſſuri.

PROPOSITIO 64.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1.

669. *Sit ſectio aquae* ABb *curua quaecunque ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus* ACB, ACb *conſtans, atque omnes ſectiones verticales* STs *ad planum diametrale* ACD *normales ſemicirculi ſeu quod eodem redit, ſit corpus* ABDb *genitum conuerſione curuae* ACB *circa axem* AC; *hoc-*

hocque corpus moueatur in aqua directe in directione CAL; *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Ex constructione huius corporis intelligitur non solum planum diametrale ATD sed omnes sectiones per axem AC transeuntes fore curuas similes et aequales semisectioni aquae ASBC. Cum igitur curua ASB data ponatur, vocatis $AP = x$, et $PS = PT = s$, dabitur aequatio inter x et s, seu s erit functio quaedam ipsius x, ita vt si ponatur $ds = p\,dx$ futura sit p pariter functio ipsius x. Sumtis nunc reliquis ambabus coordinatis $PM = y$ et $MQ = z$ quoniam sectio SQTs est semicirculus centro P descriptus cuius radius est $PS = PT = s$, erit $z^2 + y^2 = s^2$ et $z = \surd(s^2 - y^2)$; vnde fit $dz = \frac{sds - ydy}{\surd(s^2 - y^2)} = \frac{psdx - ydy}{\surd(s^2 - y^2)}$, qua aequatione natura superficiei huius corporis exprimitur. Haec ergo aequatio si comparetur cum canonica supra assumta $dz = P\,dx + Q\,dy$, fiet $P = \frac{ps}{\surd(s^2 - y^2)}$ et $Q = \frac{-y}{\surd(s^2 - y^2)}$. Ponamus iam sectionem BDb omnium sibi parallelarum esse amplissimam existente $AC = a$, seu latitudinem Bb esse maximam; ac tota superficies ABDb resistentiam patietur; sitque celeritas qua hoc corpus in aqua progreditur secundum directionem AL debita altitudini v. His praemissis ex prop. 61 resistentia sequenti modo definietur: cum sit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{(1 + p^2)s^2}{ss - y^2}$; erit $\frac{P^3dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^3sdy}{(1 + pp)\surd(ss - y^3)}$ et $\frac{P^2dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^2dy}{1 + p^2}$ atque $\frac{P^2(x + Pz)dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{p^2(x + ps)dy}{1 + p^2}$, quae differentialia ponendo x et quantitates inde pendentes p et s constantes ita sunt accipienda vt euanescant posito $y = 0$, quo

facto

facto poni debet $y = PS = s$. Hoc autem modo reperietur $\int \frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{\pi p^3 s}{2(1+p^2)}$ denotante π peripheriam circuli, cuius diameter est 1; et $\int \frac{P^2 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s}{1+p^2}$, atque $\int \frac{p^2(x+Pz)dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{p^2 s(x+ps)}{1+pp}$. Nunc positis x et p et s variabilibus habebitur resistentiae vis horizontalis, qua corpus in directione AC repellitur $= \pi v \int \frac{p^3 sdx}{1+p^2}$ in quo integrali, cum ita fuerit acceptum, vt euanescat posito $x = 0$, fieri debet $x = a$. Deinde vis resistentiae, qua corpus sursum vrgebitur est $= 2v \int \frac{p^2 sdx}{1+pp}$, haecque vis transibit per punctum axis O existente $AO = \frac{\int \frac{p^2 sdx(x+ps)}{1+pp}}{\int \frac{p^2 sdx}{1+pp}}$, singulis his integralibus ita acceptis vt euanescant posito $x = 0$, atque tum facto $x = a$. Q. E. I.

Coroll. 1.

670. Si sectio aquae ABb in B habuerit tangentem ad Bb normalem seu axi AC parallelam, tum omnia plana superficiem tangentia in punctis H sectionis BDb ad hanc ipsam sectionem erunt normalia.

Coroll. 2.

671. Simili modo quem angulum tangens sectionis aquae in S constituit cum axe PA, eundem angulum plana tangentia omnia in singulis punctis Q sectionis STs cum axe PA constituent: ex quo singula elementa Q sectionis STs eandem patientur resistentiam, quam patitur aequale elementum in S situm.

Co-

Coroll. 3.

672. Ad ſoliditatem totius huius corporis cognoſcendam ex §. 617 primum integrandum eſt differentiale $-Q\, y\, dy = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(ss-yy)}}$, cuius integrale poſito $y = s$ poſt integrationem eſt $= \frac{\pi ss}{4}$. Vnde tota ſoliditas fit $= \frac{\pi}{2} \int ssdx$ poſito poſt integrationem $x = a$

Coroll. 4.

673. Deinde cum ſuperficies $ABDb$ in genere ſit $= 2\int dx \int dy \sqrt{(1+P^2+Q^2)}$, erit ſuperficies ſolidi noſtri rotundi $= 2\int dx \int \frac{s\, dy \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(ss-yy)}} = \pi \int s\, dx \sqrt{(1+pp)}$, in quo integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $x = 0$, fieri debet $x = a$.

Coroll. 5.

674. Si integrum ſolidum rotundum, quod generatur dum figura ACB circa axem AC penitus conuertitur in aqua ſecundum directionem axis CAL moueatur, tum reſiſtentiam motui directe contrariam patietur duplo maiorem, eaque ideo erit $= 2\pi v \int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$.

Scholion.

675. Huiusmodi corpora rotunda fere ſola ab iis, qui reſiſtentiam calculo inueſtigarunt, ſunt conſiderata, longe alio autem modo in eorum reſiſtentiam inquiſiuerunt, huic corporum ſpeciei proprio. Deriuauerunt enim reſiſtentiam ex ea conſideratione, quam corollario ſecundo indicauimus, quae via quamquam eſt multo facilior, quam ea quam hic ſumus ſecuti, tamen quoniam ad alias corporum ſpecies non patet, methodo generali vti maluimus. Hinc autem generatim innoteſcit natura omnium corporum rotun-

tundorum per aequationem generalem pro iis inuentam $z^2+y^2=s^2$ ſcilicet ſumtis abſciſſis x in axe AC eſt ſemper z^2+y^2 aequale functioni cuidam ipſius x, et quoties talis aequatio occurrit, toties ea erit ad ſolidum rotundum. Sed quo reſiſtentia huiusmodi corporum plenius cognoſcatur, iuuabit caſus nonnullos particulares euoluere, quibus determinata curua pro ſectione aquae ACB accipitur.

Exemplum 1.

Taa XXVIII fig. 2.

676. Sit primo ſectio aquae ABb triangulum iſoſceles, ſeu corpus ABDb ſemiſſis coni recti circularis, qui caſus, quanquam iam ante eſt pertractatus, tamen eum hic etiam affere viſum eſt, quo conuenientia magis perſpiciatur, atque ipſa propoſitio illuſtretur. Poſita itaque ſemidiametro baſis BC=CD=b erit $a:b=x:s$, ideoque $s=\frac{bx}{a}$, et $p=\frac{b}{a}$. Vnde reſiſtentiae vis horizontalis erit $=\pi v\int\frac{p^3sdx}{1+p^2}=\frac{\pi b^4}{aa}v\int\frac{xdx}{a^2+b^2}=\frac{\pi b^4 v}{2(a^2+b^2)}$ vis verticalis autem ex reſiſtentia orta, qua corpus ex aqua eleuabitur erit $=2v\int\frac{p^2sdx}{1+pp}=\frac{2b^3v}{a}\int\frac{xdx}{aa+bb}=\frac{ab^3v}{a^2+b^2}$. Denique punctum O in quo haec vis erit applicata, ita definietur: cum ſit $AO=\frac{\int p^2sdx(x+ps):(1+pp)}{\int p^2sdx:(1+pp)}$ erit pro noſtro caſu $AO=\frac{(aa+bb)\int xxdx}{aa\int xdx}=\frac{2(aa+bb)}{3a}$, quae omnia apprime conueniunt cum ſupra §. 639 inuentis.

Exemplum 2.

Tab. XXX. fig. 1.

677. Sit ſectio aquae ABb ſemicirculus centro C deſcriptus, cuius propterea radius AC=CB=CD erit $=a$: hoc ergo caſu corpus noſtrum abibit in quartam partem ſphaerae centro C radio AC$=a$ deſcriptae. Ex na-

natura circuli igitur erit $s = \sqrt{(2ax - xx)}$ atque $p = \frac{a-x}{\sqrt{(2ax-xx)}}$; et $1 + pp = \frac{aa}{2ax-xx}$. His substitutis prodibit $\frac{p^3 s dx}{1+pp} = \frac{(a-x)^3 dx}{aa}$ cuius integrale est $\frac{a^2}{4} - \frac{(a-x)^4}{4a^2}$, quod posito $x = a$ fit $= \frac{a^2}{4}$. Resistentia igitur horizontalis, quam hoc sphaerae frustum in motu suo sentiet, erit $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Deinde cum sit $\frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{(a-x)^2 dx}{aa} \sqrt{(2ax - xx)}$, erit eius integrale posito $x = a$ post integrationem $= \frac{\pi a^2}{16}$, vnde corpus hoc verticaliter sursum vrgebitur a resistentia vi $= \frac{\pi a^2 v}{8}$. Denique cum sit $x + ps = a$, erit $\int \frac{p^2 s dx (x+ps)}{1+pp} = \int \frac{(a-x)^2 dx}{a} \sqrt{(2ax-xx)} = \frac{\pi a^3}{16}$, ex quo punctum O per quod resistentiae vis verticalis transit, ipsum sphaerae centrum C incidet. Soliditas porro huius sphaerae quadrantis erit $= \frac{\pi}{2} \int ss dx = \frac{\pi}{2} \int (2ax - xx) dx = \frac{\pi a^3}{3}$, atque superficies eius $= \pi \int s dx \sqrt{(1+pp)} = \pi \int a dx = \pi a^2$; quae quidem ex natura sphaerae sponte fluunt.

Coroll. 1.

678. Vis igitur resistentiae verticalis quae est $= \frac{\pi a^2 v}{8}$ duplo minor est quam eius vis horizontalis, qua motus retardatur. Media igitur directio resistentiae transibit per C et in plano verticali diametrali ACD sita angulum constituet cum AC cuius tangens erit $= \frac{1}{2}$.

Coroll. 2.

679. Cum basis BDb area sit $= \frac{\pi a^2}{2}$ si basis nuda eadem celeritate secundum CA moueretur in aqua, foret eius resistentia $= \frac{\pi a^2 v}{2}$; ita vt resistentia horizontalis figurae ABDb duplo sit minor, quam resistentia basis.

Coroll. 3.

680. Intelligitur etiam quantam resistentiam patiatur globus integer in aqua motus; cum enim eius semissis resistentiae sit opposita, erit resistentia ipsa $= \frac{\pi a^2 v}{4}$, si eius radius ponatur $= a$. Globus itaque in aqua motus duplo minorem patitur resistentiam, quam eius circulus maximus.

Coroll. 4.

681. Hinc resistentia, quam diuersi globi in aqua moti patiuntur erit in ratione composita ex duplicata diametrorum et duplicata celeritatum, quibus progrediuntur.

Exemplum 3.

682. Sit figura aquae innatans ABDb sphaeroidis elliptici portio, eiusmodi vt sectio aquae ABb sit semiellipsis centrum habens in C cuius semiaxes coniugati sint AC$= a$ et BC$= b$, erit ex natura ellipsis $s = \frac{b}{a} \surd(2ax - xx)$ hincque $p = \frac{b(a-x)}{a\surd(2ax-xx)}$ et $1 + pp = \frac{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}{a^2(2ax - xx)}$. Ad resistentiam igitur cognoscendam sequentes formulae integrales sunt considerandae, quarum prima est $\int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$, quae abit in $\frac{b^4}{a^2}\int \frac{(a-x)^3 dx}{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)xx}$, cuius integrale est $\frac{-b^4}{2(a^2-b^2)} + \frac{a^2b^4}{(a^2-b^2)^2} (\frac{a}{b}$. Ex hoc vis resistentiae motui contraria cuius directio est AC erit $= \pi b^2 v (\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2} (\frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2-b^2)})$ vel eadem vis per seriem expressa erit $= \frac{\pi b^4 v}{2a^2} (\frac{1}{2} + \frac{a^2-b^2}{3a^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{4a^4} + \frac{(a^2-b^2)^3}{5a^6} + \frac{(a^2-b^2)^4}{6a^8} + \text{etc.})$ quae eo magis conuergit, quo minor fuerit differentia inter a et b. Deinde cum sit $\int \frac{p^2 s dx}{1+pp} = \frac{b^3}{a}\int \frac{(a-x)^2 dx \surd(2ax-xx)}{a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2}$,

erit

erit eius integrale posito $x = a$, sequens quantitas $\frac{\pi a b^3}{4(a+b)^2}$; vnde vis resistentiae verticalis est $= \frac{\pi a b^3 v}{(a+b)^2}$; ipsam autem directionem huius vis seu locum applicationis ob prolixitatem calculi non determinamus.

Coroll. 1.

683. Si ellipsis ABb abeat in circulum ita vt sit $a = b$; tum resistentia horizontalis a logarithmis liberabitur, fietque per seriem datam $= \frac{\pi a^2 v}{4}$. Vis vero qua sursum pellitur fiet $= \frac{\pi a^2 v}{8}$, vti ante iam est inuentum.

Coroll. 2.

684. Si ellipsis ABb quam minime a circulo discrepet ita vt sit $b = a + \alpha$, denotante α quantitatem valde exiguam, erit ex serie resistentiae vis horizontalis secundum $AC = \frac{\pi a^2 v}{4} + \frac{2\pi a \alpha v}{3} = \frac{\pi b^2 v}{4} + \frac{\pi b \alpha v}{6}$, ob $a = b - \alpha$.

Coroll. 3.

685. Manente igitur axe $AC = a$, resistentia eo maior euadet, quo magis crescit $BC = b$. A si b maneat eadem, resistentia descrescet crescente axe $AC = a$. Atque ex ipsa resistentiae expressione $\pi b^2 v \left(\frac{a^2 b^2}{(a^2 - b^2)} \left(\frac{a}{b} - \frac{b^2}{2(a^2 - b^2)^2} \right) \right.$ intelligitur si a fiat infinite magnum, tum resistentiam penitus euanescere.

Coroll. 4.

686. Resistentia igitur motum retardans diminuetur augendo longitudinem sphaeroidis elliptici AC atque diminuendo latitudinem $BC = b$. Vnde quo magis axes ellipsis fuerint inter se inaequales, eo minor euadet resistentia.

Coroll. 5.

687. Cum soliditas in genere sit $= \frac{\pi}{2}\int ssdx$ erit pro nostro casu soliditas sphaeroidis elliptici A B D $b = \frac{\pi b^2}{2aa}\int (2ax - xx)dx = \frac{\pi ab^2}{3}$: posito post integrationem $x = a$.

Coroll. 6.

688. Superficies denique huius sphaeroidis, quae in genere est $\pi\int sdx\sqrt{(1+pp)}$, fiet $= \frac{\pi b}{a^2}\int dx\sqrt{(a^2b^2 + 2a(a^2-b^2)x - (a^2-b^2)x^2)}$: quae expressio posito $a-x=u$ transit in hanc $-\frac{\pi b}{a^2}\int du\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)u^2)} = \frac{-\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A sin. $\frac{u\sqrt{(aa-bb)}}{aa} + \frac{u\sqrt{(aa-bb)}}{a^4}\sqrt{(a^4-(aa-bb)uu)} + \frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A sin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} + \frac{b\sqrt{(aa-bb)}}{a^2}$. Posito ergo $x=a$ seu $u=0$ prodibit tota superficies $= \frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ (A sin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a} + \frac{b\sqrt{(a^2-b^2)}}{aa}$) $= \frac{\pi bb}{2} + \frac{\pi a^2 b}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ A sin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$.

Coroll. 7.

689. Quare si a et b non multum a se inuicem discrepent, ob A sin. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{a}$ = A tang. $\frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b} = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{b} - \frac{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^3} + \frac{(a^2-b^2)^{\frac{5}{2}}}{5b^5}$ - etc. superficiei inueniendae inseruiet ista expressio $\frac{\pi}{2}(bb + aa - \frac{a^2(aa-bb)}{3b^2} + \frac{aa(a^2-b^2)^2}{5b^4} - \frac{aa(a^2-b^2)^3}{7b^6}$ + etc.) quae vehementer est conuergens.

PROPOSITIO 65.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1.

690. *Maneant vt ante omnes sectiones verticales* S T s *ad axem* A C *normales semicirculi, quaeraturque natura curuae* A S B C *seu sectionis aquae quae formet eiusmodi solidum*

idum ABDb, *quod secundum directionem* CAL *in aqua motum minimam patiatur resistentiam simul vero maxime sit capax.*

Solutio.

Positis vt ante in sectione aquae quaesita abscissa AP $= x$, et applicata PS $= s$, atque $ds = p dx$; erit resistentia, quam patietur solidum rotundum huic aquae sectioni respondens; vt $\int \frac{p^3 s dx}{1+pp}$, quae ergo formula debet esse minimum. Hunc in finem differentietur $\frac{p^3 s}{1+pp}$, erit eius differentiale $\frac{p^3 ds}{1+pp} + \frac{(3p^2+p^4) s dp}{(1+pp)^2}$ ex quo secundum regulam supra datam §. emergit iste valor $\frac{p^3}{1+pp} + \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$, qui poni deberet $= 0$, si solidum desideretur, quod absolute minimam pateretur resistentiam. At cum insuper soliditas debeat esse maxima, soliditas vero sit vt $\int ssdx$, huicque formulae respondeat iste valor $2s$. huius multiplum quodcunque illi valori aequale est ponendum. Hinc ergo obtinebitur ista aequatio $\frac{2s}{c} = \frac{p^3}{1+pp} - \frac{1}{dx} d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2}$ multiplicetur per ds seu $p dx$, habebitur $\frac{2s ds}{c} = \frac{p^3 ds}{1+pp} - p d. \frac{(3pp+p^4)s}{(1+pp)^2} = d. \frac{p^3 s}{1+pp} - d. \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)^2}$ vnde integrale erit $\frac{ss}{c} f = \frac{p^3 s}{1+pp} - \frac{(3pp+p^4)ps}{(1+pp)} = \frac{-2p^3 s}{(1+pp)^2}$ seu $ss = cf - \frac{2cp^3 s}{(1+pp)^2}$; ex qua aequatione intelligitur fieri non posse $s = 0$, quod tamen conditio quaestionis requirit, nisi sit $f = 0$. Ponatur ergo $f = 0$, et c negatiuum erit $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$. Cum autem sit $ds = p dx$ erit $x = \frac{s}{p} + \int \frac{s dp}{pp} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} + 2c \int \frac{p dp}{(1+pp)^2} = \frac{2cpp}{(1+pp)^2} - \frac{c}{1+pp} + \text{Const.}$ vnde proueniet $x = \text{Const.} - \frac{c+cpp}{(1+pp)^2}$. Quoniam vero x eodem casu quo s euanescere debet, s autem duobus casibus euanescat, quorum alter

ter eſt ſi $p=0$, alter ſi $p=\infty$, conſtans ex eo debet determinari. Sit igitur in puncto A, $p=0$, ſeu tangens curuae A C in A incidat in ipſam rectam A L, fietque Conſt. $=c$, ex quo erit $x=\frac{3cpp+cp^4}{(1+pp)^2}$, atque $s=\frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$, haecque curua generabit ſolidum, quod minimam patietur reſiſtentiam ob cuspidem in A acutiſſimam, contra vero caſus, quo in A fit $p=\infty$, producet corpus maximae reſiſtentiae quippe qui caſus pariter in quaeſtione latet. Quamobrem curua quaeſita ita erit comparata vt abſciſſae $x=\frac{3cpp+cp^4}{(1+pp)^2}$ reſpondeat applicata $s=\frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ vnde intelligitur ſectionem aquae A S B quaeſtioni ſatisfacientem fore curuam algebraicam; quae ideo inter omnes alias aequalia ſolida generantes tale producet ſolidum, quod in directione axis A L motum minimam ſufferet reſiſtentiam. Q. E. I.

Coroll. 1.

691. Cum curua A S B, quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, ex eadem aequatione reſultet augendo abſciſſam x quantitate conſtante, intelligitur vtramque curvam tam eam ſcilicet quae ſolidum minimae reſiſtentiae, quam eam quae ſolidum maximae reſiſtentiae producit, portionem eſſe eiusdem curuae continuae.

Coroll. 2.

692. Quoniam igitur s duobus caſibus euaneſcit, ſeu curua A S B in duobus punctis axi A C occurrit, primo nimirum ſi $p=0$ quo caſu etiam x fit $=0$, et tum ſi $p=\infty$, quo caſu fit $x=c$, prior concurſus dabit curvam

vam producentem minimam resistentiam posterior vero curuam, cui solidum maximae resistentiae respondet.

Coroll. 3.

693. Quia aequatio inuenta $ss = cf - \frac{-2cp^3s}{(1+pp)^2}$ posito $f = 0$, diuisibilis est per s, patet aequationem $s = 0$ casum quoque continere in quaestione contentum. Perspicuum autem est hunc casum praebere eam curuam quae producit solidum minimae capacitatis.

Coroll. 4.

604. Cum sit $x = \frac{3cp^2+cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ intelligitur continuo ipsi p maiorem valorem tribuendo initio facto a $p = 0$, tam x quam s vsque ad certum terminum crescere, deinde vero iterum decrescere. Maxima autem erunt x er s si fiat $p = \sqrt{3}$, seu eo loco vbi tangens curuae cum axe AC angulum constituit 60. Erit autem hoc casu $x = \frac{9c}{4}$ et $s = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$.

Coroll. 5.

695. Si autem haec aequatio cum §. 532. comparetur, deprehendetur haec curua congruere cum ea curva supra inuenta, quae inter omnes alias eandem aream continentes patiatur minimam resistentiam. Curua igitur hic inuenta erit curua illa triangularis AMBCDNA. Tab. XXIV. fig. 1.

Coroll. 6.

696. Huius igitur curuae portio AMB circa axem AC rotata producet solidum, quod simul maximam habe-

 bit

bit capacitatem, atque ſecundum directionem axis CA motum minimam patietur reſiſtentiam. Altera vero portio BCD circa axem eundem CE rotata ſolidum dabit maximam reſiſtentiam patiens.

Coroll. 7.

697. In hac igitur curua, quae ad axem ACE vtrinque ſibi eſt ſimilis et aequalis ipſe axis CA erit tangens in A; vnde aſcendet et deſcendet vsque ad B et D, exiſtente $AE = \frac{9c}{8}$ et $BE = DE = \frac{3c\sqrt{3}}{8}$. Deinde ex cuspidibus B et D cum axe in C vnitur exiſtente $AC = c$: eius vero tres portiones AMB, BCD et AND inter ſe aequales erunt et ſimiles.

Scholion.

698. Problema iſtud ab aliis, qui hoc argumentum pertractauerunt, omiſſa ea conditione, qua ſimul ſolidum capaciſſimum requiritur, proponi eſt ſolitum, ita vt inter omnes omnino curuas eam determinare ſint conati, quae circa axem rotata ſolidum producat quod in directione axis motum minimam pateretur reſiſtentiam. At hoc modo nulla inuenitur curua idonea quaeſito ſatisfaciens, reſoluetur enim iſte caſus ex noſtra ſolutione ponendo $c = \infty$, unde fit $s = \frac{\int(1+pp)^2}{2p^3}$ ex quo nunquam fieri poteſt $s = 0$, ideoque curua deſiderata cum axe nunquam concurreret, id quod eſt contra conditionem intentam. Hancobrem iſtam quaeſtionem hic penitus omittere viſum eſt, eiusque loco praeſentem proponere, qua praeter minimam reſiſtentiam maxima capacitas requiritur. Haec enim quaeſtio eo magis ad inſtitutum noſtrum eſt accommodata, cum in nauibus

bus non ſolum minima reſiſtentia deſideretur, ſed ſimul naues maxime capaces eſſe oporteat. Facile autem perſpicitur figuram inuentam nimis abhorrere a figuris nauium conſuetis, aliasque circumſtantias prohibere, quominus nauibus talis figura vel ſaltem affinis tribuatur. Ceterum notatu dignum euenit quod curua inuenta ſit algebraica; cuius vero ordinis ſit, eliminando p ita inueſtigabitur. Cum ſit $x = \frac{3cp^2 + cp^4}{(1+pp)^2}$ et $s = \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$ erit $\sqrt{(xx-3ss)} = \frac{3cpp - cp^4}{(1+pp)^2}$ indeque $\frac{x}{\sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{3+pp}{3-pp}$; vnde fit $pp = \frac{3x - 3\sqrt{(xx-3ss)}}{x + \sqrt{(xx-3ss)}} = \frac{(x-\sqrt{(xx-3ss)})^2}{ss}$ et $p = \frac{x-\sqrt{(xx-3ss)}}{s}$. porro eſt $pp + 1 = \frac{2xx - 2ss - 2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$, atque $pp + 3 = \frac{2xx - 2x\sqrt{(xx-3ss)}}{ss}$. His autem valoribus in aequatione $(1+pp)^2 x = cpp(3+pp)$ ſubſtitutis atque irrationalitate ſublata emerget iſta aequatio $4s^4 + 8xxss - 36cxss + 27ccss - 4cx^3 + 4x^4 = 0$. Poſito autem $c = 2a$ orietur iſta aequatio $s^4 + 2xxss - 18axss + 27a^2ss - 2ax^3 + x^4 = 0$, ita vt curua ſatisfaciens inuenta pertineat ad lineas quarti ordinis. Ex hac igitur aequatione elicitur $ss = -xx + 9ax - \frac{27}{2}a^2 \pm \frac{(9a-4x)\sqrt{a(9a-4x)}}{2}$, vnde conſtructio curuae non ſit difficilis. Commodius vero partis huc ſeruientis AMB natura cognoſcetur ex hac ſerie $ss = xx \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{4x}{9a} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 8} \cdot \frac{4^2 \cdot x^2}{9^2 \cdot a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{4^3 \cdot x^3}{9^3 \cdot a^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{4^4 \cdot x^4}{9^4 \cdot a^4} + \text{etc.}\right.$ vel poſito $\frac{9a}{4} = b$, vt ſit $b = \frac{9c}{8} = $ AE erit $ss = xx \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{x}{b} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 8}\frac{x^2}{b^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{6 \cdot 8 \cdot 10b^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^4}{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12b^4} + \text{etc.}\right)$ ex qua aequatione facile intelligitur tangentem in A in axem AC incidere, quod ex aequatione ſuperiore difficilius perſpicitur. Nunc autem ad alias corporum ſpecies progrediamur minus determinatas quam hactenus tractatae, in quibus ſcilicet duae curuae ſuperſint arbitrariae.

 PRO.

PROPOSITIO 66.

Problema.

Tab. XXX. fig. 1.

669. *Sit non solum sectio aquae* ABb *sed etiam sectio amplissima* BDb *curua quaecunque data, solidumque* ABDb *hanc habeat proprietatem, vt omnes sectiones verticales* STs *ad axem* AC *normales sint sectioni* BDb *similes atque moueatur hoc corpus in aqua secundum directionem* CAL *determinari oportet resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Primo cum sectio aquae ABb seu potuis eius semissis ACB sit curua quaecunque data, sumta in ea abscissa AP $= x$, et posita applicata PS $= s$, erit s functio quaedam ipsius x data. Deinde cum etiam curua BDb seu potius eius semissis BDC data sit positis ad eam coordinatis CG $= r$ et GH $= u$, dabitur aequatio inter u et r atque u aequabitur functioni cuidam ipsius r. Cum nunc sectio STP similis sit sectioni BDC, lineae in iis homologae tenebunt rationem vt PS ad CB. Posito igitur CB $= b$, et pro sectione SPT sumtis coordinatis PM $= y$, et MQ $= z$ similibus ipsis r et u, erit $y = \frac{rs}{b}$ et $z = \frac{us}{b}$. Cum nunc s sit functio ipsius x, ponatur $ds = pdx$, vt p sit functio ipsius x, similiterque ob u functionem ipsius r ponatur $du = qdr$, vt q sit functio ipsius r. His igitur factis erit $dy = \frac{rpdx}{b} + \frac{sdr}{b}$, et $dz = \frac{updx}{b} + \frac{sqdr}{b}$; vnde ob $\frac{sdr}{b} = dy - \frac{rpdx}{b}$ sequens emergit aequatio inter tres coordinatas x, y, et z qua natura superficiei propositae continetur: $dz = \frac{(u-qr)pdx}{b} + qdy$; quae cum generali aequatione in prop. 61. assumta

sumta $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata praebet $P = \frac{(u-qr)p}{b}$ et $Q = q$, vbi notandum quantitates s et p a sola x pendere, u vero et q ab r, atque r et x a se mutuo non pendere. Ad resistentiam iam motui contrariam inueniendam oportet primum huius formulae $\frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2}$ posito x constante integrale reperire, atque post integrationem facere $y = s$. Quoniam igitur x est constans, erit $dy = \frac{s\,dr}{b}$, atque ob $1 + P^2 + Q^2 = \frac{b^2 + (u-qr)^2 p^2 + b^2 q^2}{b^2}$ fiet $\frac{P^3 dy}{1+P^2+Q^2} = \frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr}{b^4(1+qq) + b^2 p^2 (u-qr)^2}$ in cuius integrali capiendo p et s tanquam quantitates constantes considerari debent. Inuento igitur integrali $\frac{p^3 s}{b^2}\int\frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$ ita vt euanescat posito $r = 0$, tumque facto $r = b$, integrale hoc multplicandum est per dx, denuoque integrale capiendum, vnica enim inerit variabilis x, atque integratione peracta poni debet $x = AC = a$. Vel quod eodem redit ista formula $\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2(u-qr)^2}$ bis est integranda, in altera integratione x, p, et s ponendo constantia, in altera autem r, q et u; perinde enim est quaenam integratio prius instituatur. Designata autem quantitate, quae per duplicem integrationem, post quam positum est $r = b$ et $x = a$, prodit, per hanc formam $\iint\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2(u-qr)^2}$ erit resistentiae vis, quae secundum directionem AC retro pellit corpus $= \frac{2v}{bb}\iint\frac{(u-qr)^3 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$. Simili autem modo rem peragendo reperietur resistentiae vis verticalis corpus sursum sollicitans $= \frac{2v}{b}\iint\frac{(u-qr)^2 p^2 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + p^2(u-qr)^2}$. Denique si eodem modo quaeratur valor $\iint\frac{(u-qr)^2(bbx + pus(u-qr))p^2 s\,dr\,dx}{b^4(1+qq) + b^2 p^2(u-pr)^2}$ isque diuidatur per $\iint\frac{(u-qr)^2 p^3 s\,dr\,dx}{b^2(1+qq) + pp(u-qr)^2}$ prodibit distantia AO, ex eaque situs puncti O per quod vis resistentiae verticalis transit. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

700. Cum ſit $\frac{(u-qr)^3 dr}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = dr \left(\frac{(u-qr)^3}{b^2(1+qq)} - \frac{p^2(u-qr)^5}{b^4(1+qq)^2} + \frac{p^4(u-pr)^7}{b^6(1+qq)^3} - a\right)$ fiet $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s dr dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2} = \frac{1}{bb}\int p^3 s dx . \int\frac{(u-qr)^3 dr}{1+qq} - \frac{1}{b^4}\int p^5 s dx . \int\frac{(u-qr)^5 dr}{(1+qq)^2} + \frac{1}{b^6}\int p^7 s dx . \int\frac{(u-qr)^7 dr}{(1+qq)^3} -$ etc. in quibus integrationibus variabiles r et x, a ſe inuicem prorſus ſunt ſeparatae.

Coroll. 2.

701. Si igitur ſingulae formulae differentiales, in quibus tantum ineſt r et quantitates inde pendentes u et q ita integrentur vt euaneſcant poſito $r = b$; ſimilique modo alterae formulae integrales in quibus tantum inſunt x et s et p integrentur, tumque ponatur $x = a$; obtinebitur deſideratus valor formulae $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s dr dx}{b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2}$.

Coroll. 3.

702. Simili igitur modo reliquae formulae differentiales, quae duplicem integrationem requirunt, per ſeries ita exprimi poterunt, vt binae variabiles x et r prorſus a ſe inuicem ſeparentur; quo facto ſingulae ſine vllo reſpectu ad reliquas habito ſeorſim integrari poterunt.

Coroll. 4.

703. Cum ſoliditas corporis in genere ſit $= -2\int dx \int Q y dy$, vbi in integtatione $\int Q y dy$ ponitur x conſtans, erit pro noſtro caſu ob $y = \frac{rs}{b}$ et $dy = \frac{s dr}{b}$ atque $Q = q$, formula $\int Q y dy = \int\frac{qrs^2 dr}{bb} = \frac{s^2}{b^2}\int r du = -\frac{s^2}{b^2}\int u dr$, vbi $\int u dr$ denotat aream BCD vnde tota ſoliditas erit $= 2\int\frac{ss dx}{bb}\int u dr$.

Co-

Coroll. 5.

704. Superficies vero solidi ABDb ex formula generali $2\int dx \int dy \sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ inuenietur, quae ob x constans in altera integratione abit in $2 \iint \frac{sdrdx}{bb} \sqrt{(bb(1+qq) + pp(u-qr)^2)}$ vbi duplici integratione est opus, altera in qua r, altera in qua x ponitur constans.

PROPOSITIO 67.

Problema.

705. *Si data fuerit sectio verticalis* BDb *ad axem* AC *normalis, cui omnes reliquae sectiones ipsi parallelae* STs *sint similes; determinare curuam* ASB, *ex qua natum solidum* ABDb *pro capacitate sua minimam patiatur resistentiam, si quidem moueatur in aqua secundum directionem axis* CAL.

Tab. XXX. fig. 1.

Solutio.

Manentibus vt ante, $BC = b$, $CG = r$, atque $GH = u$, positoque $du = qdr$, ita vt u et q futurae sint functiones datae ipsius r; sit $AP = x$ $PS = s$ ponaturque $ds = pdx$, quibus positis erit resistentia vt $\iint \frac{(u-qr)^3 p^3 s\, drdx}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$ quae quantitas ideo bis integrata minimum esse debet. Concipiatur autem integratio ea primum institui in qua r cum inde pendentibus s et q ponitur constans, atque post integrationem fieri $x = AC = a$, manifestnm est in altera integratione naturam curuae ASB non amplius contineri. Quo circa requiritur vt quantitas, quae per priorem integrationem prodit, reddatur minima Multiplicatum autem hic est dx per $\int \frac{(u-qr)^3 p^3 sdr}{b^2(1+qq)+pp(u-qr)^2}$, in qua p et s tantum

tantum sunt quantitates variabiles. Ponatur breuitatis gratia $u - qr = t$ et $1 + qq = w^2$, habebitur ista formula $\int \frac{t^3 p^3 s dr}{bb w^2 + tt p^2}$, quae differentiata ponendis semper r, t et w constantibus dat $p^3 ds \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + tt p^2} + pp dp \int \frac{(3b^2 w^2 + tt p^2) t^3 s dr}{(bb w^2 + tt p^2)^2}$ vnde oritur iste valor ad determinationem minimi requisitus $p^3 \int \frac{t^3 dr}{bb w^2 + tt p^2} - \frac{1}{dx} d. pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s dr}{(b^2 w^2 + tt p^2)^2}$, qui poni deberet $= 0$ nisi capacitatis ratio esset habenda. Capacitas vero est vt $\int ssdx \int udr$, in quo integrali multiplicatum est dx per $ss \int udr$, cuius differentiale est $2sds \int udr$, ex quo valor ad maximum determinandum inseruiens est $2s \int udr$. His ergo valoribus coniunctis emerget ista aequatio $\frac{2s \int udr}{c} = p^3 \int \frac{t^3 dr}{b^2 w^2 + tt p^2} - \frac{1}{dx} d. pp \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$, quae multiplicata per $pdx = ds$, et integrata dat $\frac{ss \int udr}{c} - f^3 = \int \frac{t^3 p^3 s dr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} - \int \frac{(3b^3 w^2 + t^2 p^2) t^3 p^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} = - \int \frac{2b^2 w^2 t^3 p^3 s dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo ergo fieri queat $s = 0$, necesse est vt sit $f = 0$; ita vt facto c negatiuo ista habeatur aequatio pro curua quaesita $s = \frac{2b^2 c p^3}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$ cui valor sequens ipsius x valor respondebit $x = \int \frac{s}{p} = \frac{s}{p} + \int \frac{sdp}{pp} = \text{Const.} + \frac{2b^2 c p^2}{\int udr} \int \frac{w^2 t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2} \frac{-b^2 c}{\int udr} \int \frac{w^2 t dr}{b^2 w^2 + t^2 p^2} = \text{Const.} - \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{(b^2 w^2 - t^2 p^2) w^2 t dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quo x simul euanescat, si fit $p = 0$, quippe quo casu simul fit $s = 0$, fiet $\text{Const.} = \frac{b^2 c}{\int udr} \int \frac{t dr}{b^2}$ ita vt fiat $x = \frac{cpp}{\int udr} \int \frac{(3b^2 w^2 + t^2 p^2) t^3 dr}{(b^2 w^2 + t^2 p^2)^2}$. Quoniam autem $\int udr$ valorem habet constantem ratione variabilium nostrarum x, s et p, ea in constanti c comprehendatur, atque restitutis pristinis valoribus pro w et t, haec habetur constructio:
$x = \frac{cpp}{bb} \int \frac{(3b^2(1 + qq) + pp(u - qr)^2)(u - qr)^3 dr}{(b^2(1 + q^2) + p^2(u - qr)^2)^2}$ et $s = 2 c p^3$
$\int (1 + p$

$\int \frac{(1+rq)(u-qr)^3 dr}{(b^4(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^2}$. Quae formulae integrales constructionem minime turbant, cum in iis p constans ponatur, ideoque ex aequatione inter r et u data integratio actu absolui queat; ita autem integratio absolui debet vt prodeat o posito $r=0$, quo facto faciendum est $r=b$. Q. E. I.

Coroll. 1.

706. Haec igitur curua pariter in A tangentem habebit in axem AL incidentem, cum initio quo tam x et s euanescunt sit $p=0$. Insuper vero alio loco curua in axem AC cadet, quod eueniet si $p=\infty$, hoc enim casu fit $s=0$ et $x=\frac{c}{bb}\int(u-qr)dr=\frac{2c}{bb}\int udr$; seu x aequabitur areae basis BDb ductae in $\frac{c}{bb}$; vel erit $x=\frac{2c \cdot BCD}{BC^2}$.

Coroll. 2.

707. In altero hoc puncto, vbi curua iterum in axem AC incidit, tangens erit normalis ad axem AC, ex quo ista curuae portio solidum generabit maximam patiens resistentiam.

Coroll. 3.

708. Cum insuper axis AC sit diameter curuae inventae, quod constat ex eo, quia facto p negatiuo x manet, s vero in sui negatiuum abit, curua non multum dissimilis erit ei quam ante inuenimus, cum sectio BDb sit semicirculus.

Coroll. 4.

709. Ab inito autem vbi fit $p=0$, crescente p

crescent

crescent tum abscissa x quam applicata s vsque ad certum terminum, qui terminus reperietur differentiando $\int \frac{p^3(1+qq)(u-qr)^3 dr}{(b^2(1+qq)+p^2(u-qr)^2)^2}$ posito tantum p variabili, faciendoque differentiali $=0$.

Coroll. 5.

710. Absoluta autem hac differentiatione reperietur sequens aequatio ex qua valor ipsius p determinabitur $0=\int \frac{p^2(3b^2(1+q^2)-p^2(u-qr)^2)(1+q^2)(u-qr)^3 dr}{(b^2(1+q^2)+p^2(u-qr)^2)^3}$ quae integratio modo praescripto perfici debet, posteaque poni $r=b$.

Coroll. 6.

711. Si fuerit $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ quod accidit, si curua BDb fuerit semicirculus, tum quantitas p ex formulis integralibus eliminari poterit. Erit nempe hoc casu $x=\frac{cf^3p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$ et $S=\frac{2cf^3p^3}{(bb+ffpp)^2}\int dr\sqrt{(1+qq)}$.

Coroll. 7.

712. Si igitur $\int dr\sqrt{(1+qq)}$ seu arcus BD tanquam quantitas constans in c comprehendatur fiet $x=\frac{c^5p^2(3bb+ffpp)}{bb(bb+ffpp)^2}$ et $S=\frac{2c^5p^3}{(bb+ffp^2)^2}$.

Scholion.

713. Notandum ceterum est hanc proprietatem, qua est $(u-qr)^2=ff(1+qq)$ seu $-u+qr=f\sqrt{(1+qq)}$, in nullam aliam curuam praeter circulum competere. Nam sumtis differentialibus ob $du=qdr$ erit $rdq=\frac{fqdq}{\sqrt{(1+qq)}}$ ideoque $r=\frac{fq}{\sqrt{(1+qq)}}$ vel etiam propter diuisionem

$dy = 0$, vnde primo linea recta dicta proprietate gaudet. Deinde cum ſit $u = qr - f\sqrt{(1+qq)}$ erit $u = \frac{fqq}{\sqrt{(1+qq)}} - f\sqrt{(1+qq)} = -\frac{f}{\sqrt{(1+qq)}}$. Erit ergo $\frac{r}{u} = -q$ vnde fit $r = \frac{fr}{\sqrt{(r^2+u^2)}}$ ſeu $f = \sqrt{(r^2+u^2)}$. Quia autem facto $u = 0$ fieri debet $r = b$ erit $f = b$, indeque $b^2 = r^2 + uu$. Caſus itaque memoratus quo fit $(u-qr)2 = ff(1+qq)$ locum non habet, niſi ſectio B D b, fuerit ſemicirculus vel triangulum iſoſceles. Denique id etiam hic generaliter locum habet, vt, quaecunque fuerit curua B D b, curua A B quaeſtioni ſatisfaciens ſemper euadat algebraica, cum formulae integrales conſtructionem algebraicam non afficiant.

PROPOSITIO 68.

Problema.

714. *Si data ſit corporis* ABDb *tum ſectio ampliſſima* BDb, *tum etiam figura ſpinae* ASD *ſeu ſectio diametralis* ACD, *ſolidumque ita ſit comparatum vt omnes ſectiones verticales parallelae ſectioni mediae* ACd *eidem ſint ſimiles: determinare reſiſtentiam, quam hoc corpus ſentiet, ſi curſu directo ſecundum directionem* CAL *in aqua promoueatur.*

Tab. XXX. fig. 2.

Solutio.

Cum primo data ſit ſectio verticalis diametralis A C D dabitur aequatio inter eius abſciſſam A R $= r$ et aplicatam R S $= s$, ita vt s aequetur functioni ipſius r futurumque ſit $ds = p\,dr$ exiſtente p pariter functione ipſius r. Deinde ſit interuallum A C $= a$, quo vertex A a ſectione ampliſſima B D b diſtat, atque pro hac ſectione

BDC ponatur abſciſſa $CG = y$, quippe quae aequalis euadet ſecundae variabili $PM = y$, trium illarum x, y et z, quae in aequationem localem totius ſuperficiei ingredientur, atque applicata $GH = u$, eritque ob hanc curuam cognitam u functio quaedam ipſius y, ita vt poſito $du = q dy$ futura ſit etiam q functio ipſius y; poſito vero $y = 0$, abibit GH, u in CD, quae ſit $= c$ ita vt c tam fiat valor ipſius u poſito $y = 0$ quam valor ipſius s poſito $r = a$. Iam cum ſectio FGH, parallela ſectioni ACD, eidem ſit ſimilis erit $CD : AC = GH : FG$, ex quo fit $FG = \frac{au}{c}$. Sumto nunc in ſectione FGH puncto M homologo puncto R in ſectione ACD erit $FM = \frac{ru}{c}$, et $MQ = z = \frac{su}{c}$. Porro ex M ad axem AC ducatur normalis $MP = y$, quippe quae aequalis eſt ipſi CG, et poſito $AP = x$ erit $CP = a - x = GM = \frac{au}{c} - \frac{ru}{c}$, vnde fit $x = a - \frac{(a-r)u}{c}$. Quare cum ex curuis ACD et BCD datis ſequentes variabilium x, y, et z habeamus valores $x = a - \frac{(a-r)u}{c}$; $y = y$ et $z = \frac{su}{c}$, erit $dx = \frac{-aqdy + rqdy + udr}{c}$; et $dz = \frac{sqdy + updr}{c}$ vbi cum ſit $\frac{udr}{c} = dx + \frac{aqdy - rqdy}{c}$ fiet $dz = p dx + \frac{(ap - rp + s)qdy}{c}$, quae aequatio cum canonica $dz = P dx + Q dy$ comparata praebet $P = p$ et $Q = \frac{(ap - rp + s)q}{c}$, ita vt ſit $1 + P^2 + Q^2 \frac{c^2 + c^2p^2 + (ap - rp + s)^2 q^2}{c^2}$: quae expreſſiones duas complectuntur quantitates variabiles a ſe inuicem non pendentes ſcilicet y, et per y datas u et q, atque r ex eaque datas s et p. Hinc erit $\frac{P^3 dy}{1 + P^2 + Q^2} = \frac{c^2 p^3 dy}{c^2(1 + p^2) + q^2(ap - rp + s)^2}$ in cuius differentialis integratione tantum y eſt variabilis, atque r, s et p tanquam conſtantes ſpectantur. Integratione autem

autem ita abſoluta vt prodeat o, poſito $y=0$ fieri debet $y=BC$ ſeu $u=0$; quo facto prodibit functio mera ipſius r quae in dx ducta denuo integrari debet. Sed cum dx poſito y conſtanti fiat $=\frac{udr}{c}$, ideoque ab y pendeat, duplex iſta integratio inuerſo modo eſt inſtituenda, ponendo primo y conſtans. Nam quoniam formula generalis ad reſiſtentiam definiendam eſt $\iint\frac{P^3dydx}{1+P^2+Q^2}$, quae duplicem integrationem requirit alteram poſito x conſtante, alteram poſito y conſtante, ea ob $dx=\frac{udr}{c}$ pro noſtro caſu abit in hanc $\iint\frac{cp^3udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ cuius valor pariter duplici integratione eſt eruendus, in quarum altera y cum u et q, in altera vero r cum p et s poni debet conſtans. Hocque modo rem abſoluendo perinde eſt vtra integratio primum abſoluatur. Vtraque autem integratio ita perfici debet, vt integralia per omnes valores variabilium r et y extendantur. Hoc ergo monito prodibit reſiſtentiae vis horizontalis in directione AC repellens $=2cv\iint\frac{p^3udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ Reſiſtentiae vero vis verticalis corpus ſurſum vrgens erit $=2cv\iint\frac{p^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$. Ad cuius locum applicationis ſeu punctum O inueniendum ob $x+Pz=\frac{ac-(a-r)u+psu}{c}$ iſta quantitas $\iint\frac{(ac-(a-r(u+psu)p^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ diuidi debet per $\iint\frac{cp^2udrdy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$, quotusque indicabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. 1.

715. Cum in ſectione aquae BAb applicata GF ad applicatam GH ſectionis ampliſſimae BDb conſtantem habeat rationem, curua CBA affinis erit curuae CED, vt ſi data ſit curua CBA ſectio aquae ACB facillime innoteſcat.

 Coroll.

Coroll. 2.

716. Huius igitur problematis ſolutio ſimilis manebit, ſi loco curuae BCD daretur ſectio aquae ACB; quamobrem dummodo omnes ſectiones verticales FGH inter ſe ſint ſimiles, perinde ſe habebit ſolutio, ſiue curva ACB detur ſiue altera BCD.

Coroll. 3.

717. Quoniam porro tota corporis ABDb ſoliditas generaliter eſt $= -2\int\int Q\, y\, dy\, dx$ erit pro noſtro caſu ob $dx = \frac{udr}{c}$ et $Q = \frac{(ap-pr+s)q}{c}$ ſoliditas $= \frac{-2}{cc}\int\int(ap-pr+s)\,qu\,y\,dr\,dy$.

Coroll. 4.

718. Harum duarum integrationum inſtituatur primum, in qua y, ſimulque u et q ponuntur conſtantes, fiet $\int(ap-pr+s)dr = \int sdr + \int(a-r)ds = t$ areae ACD ſi poſt integrationem ponatur $r = a$. Haec area ACD ergo ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{-4ff}{cc}\int quy\,dy$.

Coroll. 5.

719. Deinde cum ſit $\int quy\,dy = \int uy\,du$ erit $\int quy\,dy = \frac{u^2y}{2} - \frac{1}{2}\int u^2\,dy = -\frac{1}{2}\int u^2\,dy$ poſito $u = 0$. Quare tota ſoliditas prodibit $= \frac{2ff}{cc}\int u^2 dy$, quae expreſſio eadem ex natura conſtructionis oritur.

Scholion.

720. Quoniam figura ſectionis aquae ACB ex ſola ſectione ampliſſima BCD determinatur neque a figura ſe-

ſectionis diametralis ACD pendet, ſimul etiam iſta quaeſtio eſt reſoluta, qua ſolidi reſiſtentia quaeritur, quod ex datis curuis ACB et ACD ita generetur vt omnes ſectiones FGH plano diametrali ACD parallelae ſint inter ſe ſimiles; adeo vt non opus ſit hanc quaeſtionem ſeorſim tractare. Simili modo in caſu praecedente, quo datae erant ſectio aquae ACB et ſectio ampliſſima BCD huic autem parallelae ſectiones omnes SPT poſitae ſunt inter ſe ſimiles, curua ATD a ſola curua ASB determinatur vbique enim habet PT ad PS eandem rationem eam ſcilicet quam habet CD ad CB, ita vt curua ATD affinis ſit curuae ASB: voco autem curuas affines, quae communem habent abſciſſam, et quarum applicatae aequalibus abſciſſis reſpondentes datam inter ſe tenent rationem; ita omnes ellipſes vnum axem communem habentes ſunt ſecundum hanc definitionem curuae affines; ſed mox hanc definitionem pluribus euoluemus. Propter iſtam igitur affinitatem, quae inter ſectiones ACB et ACD intercedit alteram quaeſtionem etiam non attigimus, qua quaeri poſſet reſiſtentia eiusmodi ſolidorum, quae ex datis curuis BCD et ACD ita generantur vt omnes ſectiones SPT ſectioni ACD parallelae ipſi ſimul ſint ſimiles. Hinc etiam in ſequentibus, vbi omnes ſectiones horizontales inter ſe ſimiles ponuntur alterutram curuarum BCD et ACD pro data aſſumere ſufficiet, cum pari modo altera alteri ſit affinis. Hoc igitur pacto numerus problematum pertractandorum, ſi quidem perfectam enumerationem facere volemus, ad ſui medietatem diminuitur.

Tab. XXX. fig. 1.

Exem-

Exemplum 1.

Tab. XXX. fig. 2.

721. Ponamus omnes ſectiones verticales FGH. ſectioni diametrali ACD parallelas eſſe quadrantes circuli centris G deſcriptos, ſeu ſolidum ABDb generatum conuerſione figurae BDb circa axem immobilem Bb. Erit ergo ACB quadrans circuli, ideoque $c = a$, et $s = \surd(2ar - rr)$; vnde fit $p = \frac{(a-r)}{\surd(2ar-rr)}$ et $1 + pp = \frac{a^2}{2ar-rr}$ atque $ar - rp + s = \frac{aq}{\surd(2ar-rr)}$. His ſubſtitutis prodit reſiſtentiae horizontalis vis $= \frac{2v}{a^2}\iint\frac{(a-r)^3 udrdy}{(1+qq)\surd(2ar-rr)}$. Ponatur primo u cum y et q conſtans, atque integrale $\int\frac{(a-r)^3 dr}{\surd(2ar-rr)}$ poſito poſt integrationem $r = a$ fiet $= \frac{2}{3}a^3$ quare vnica integratio reſtat, ideoque erit reſiſtentia queſita $= \frac{4v}{3}\int\frac{udy}{1+qq}$, quod integrale ita eſt accipiendum, vt euaneſcat poſito $y = 0$, tumque ponatur $u = 0$. Reſiſtentiae autem vis verticalis, qua corpus ſurſum vrgebitur erit $= \frac{2v}{a^3}\iint\frac{(a-r)^2 udrdy}{(1+qq)}$ prior vero integratio poſito y conſtante, facto $r = a$ dat $\int(a-r)\,dr = \frac{a^3}{3}$. Hinc ergo prouenit reſiſtentiae vis verticalis $\frac{2v}{3}\int\frac{udy}{1+qq}$. Denique cum fit $\frac{ac-(a-r)u+psu}{a} = a$, erit interuallum A O $= a$, ſeu punctum O, cui vis illa verticalis eſt applicata incidet in ipſum punctum C.

Coroll. 1.

722. In huiusmodi igitur corporibus, quae reſpectu axis Bb ſunt rotunda, reſiſtentiae vis horizontalis ad verticalem conſtantem habet rationem; ſcilicet reſiſtentia verticalis ſe habebit ad horizontalem vt 1 ad 2, ita vt vis verticalis ſit duplo minor, quam horizontalis.

Coroll.

Coroll. 2.

723. Si sectio amplissima BDb quoque fuerit semicirculus ita vt corpus fiat quadrans sphaerae; ob $CB = CD = a$, erit $u = \sqrt{(a^2 - y^2)}$ et $q = \frac{-y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$; quare fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \int \frac{dy(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = \frac{3\pi a^2}{16}$; ita vt resistentia horizontalis prodeat $= \frac{\pi a^2}{4}$ et verticalis $= \frac{\pi a^2}{8}$.

Coroll. 3.

724. Si sectio amplissima BDb fiat triangulum isosceles, ita vt sit $BC = Cb = b$ erit $u = a - \frac{ay}{b}$, et $q = \frac{-a}{b}$ Ex his fiet $\int \frac{u\,dy}{1+qq} = \frac{ab}{aa+bb} \int (b-y)\,dy = \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$ · quare resistentia horizontalis erit $= \frac{2ab^3}{3(aa+bb)}$ et verticalis $= \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}$

Coroll. 4.

725. Intelligitur ex hoc casu resistentiam ceteris paribus eo fore minorem, quo maius fuerit discrimen inter latitudinem BC et altitudinem CD. Manente enim b in his formulis, resistentia fit maxima si ponatur $a = b$.

Exemplum 2.

726. Sint nunc omnes sectiones verticales FGH, quae sectioni diametrali sunt parallelae quadrantes elliptici inter se similes: eritque sectio diametralis ACD pariter quadrans ellipticus cuius alter semiaxis $AC = a$, alter $CD = c$, vnde fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(2ar - rr)}$ atque $p = \frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$. Sit breuitatis gratia $a - r = t$, fiet $s = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - t^2)}$ et $p = \frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $1 + pp = \frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$ porroque $(a-r)p + s = \frac{ac}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$:

 ex

ex quibus fit $\frac{p^3 u dr dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2} = \frac{-ct^3 u dt dy}{(a^5(1+qq)-a(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Integretur primo haec formula ponendo y et u et q constantes, ita vt integrale euanescat posito $t=a$, quo facto fiat $t=0$; orieturque $\frac{cudy}{a^2-c^2}\left(-1+\frac{a^2(1+qq)}{\sqrt{(a^2-c^2)(a^2q^2+c^2)}}\right.$ A tang. $\left.\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{\sqrt{(a^2q^2+c^2)}}\right)$ seu per seriem $\frac{cudy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}\right.$ $\left.-\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$, quae commodiorem praestat vsum quam illa expressio, quippe quae si $c>a$ cessat a quadratura circuli penderet, sed ad logarithmos reducitur. Hinc itaque resistentiae vis horizontalis, quam hoc corpus sentiet, erit $=2c^2 v\int\frac{udy}{a^2q^2+c^2}\left(1-\frac{a^2(1+q^2)}{3(a^2q^2+c^2)}+\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)}{5(a^2q^2+c^2)^2}-\right.$ $\left.\frac{a^2(1+q^2)(a^2-c^2)^2}{7(a^2q^2+c^2)^3}+\text{etc.}\right)$ integratione ita absoluta vt fiat integrale $=0$ si ponanur $y=c$, tumque poni debet $y=$ CB seu $u=0$.

Exemplum 3.

727. Sit nunc tam curua ACD quam BCD quadrans ellipticus, ita vt quadrantis elliptici ACD semiaxes sint AC $=a$ et CD $=c$; alterius vero BCD semiaxes BC $=b$ et CD $=c$; erit ergo primo vt ante $s=\frac{c}{a}\sqrt{(2ar-rr)}$ et $p=\frac{c(a-r)}{a\sqrt{(2ar-rr)}}$ seu posito $a-r=t$ erit $s=\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-tt)}$; $p=\frac{ct}{a\sqrt{(a^2-t^2)}}$ $1+p^2=\frac{a^4-(a^2-c^2)t^2}{a^2(a^2-t^2)}$; formulaque resistentiae horizontali inueniendae inseruiens $\frac{p^3 u dr dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ fiet $=\frac{ct^3 u dt dy}{a(a^4(1+qq)-(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$. Cum nunc porro sit $u=\frac{c}{b}\sqrt{(b^2-y^2)}$ erit $q=\frac{-cy}{b\sqrt{(b^2-y^2)}}$ et $1+qq=\frac{b^4-(b^2-c^2)y^2}{b^2(bb-yy)}$, atque formula illa differentialis transibit in hanc

$$\frac{bc^2t^3 dt dy(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{a(a^4b^4-a^4(b^2-c^2)y^2-b^4(a^2-c^2)t^2+b^2(a^2-c^2)t^2y^2)\sqrt{(a^2-t^2)}}$$

cuius

cuius integrale posito t constanti reperitur $= \frac{\pi b^2 c^2 t^3 dt}{4a\sqrt{(a^2-t^2)}} \left(\frac{2a^6 c^3 - b(3a^4c^2 - a^4b^2 + b^2(a^2-c^2)t^2)\sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}}{(a^4(bb-cc)-b^2(a^2-c^2)t^2)^2\sqrt{(a^4-(a^2-c^2)t^2)}} \right)$ quae formula denuo integrata positoque post integrationem $t = a$, si multiplicetur per $2cv$ dabit vim resistentiae horizontalem qua motus retardabitur. Sed cum parum ad vtilitatem hinc concludi queat, per methodum maximorum et minimorum naturam curuae BCD definiamus, cui minima resistentia respondeat.

PROPOSITIO 69.

Problema.

728. *Si data sit sectio diametralis* ACD *cui omnes sectiones parallelae sunt similes, determinare naturam curuae* BCD, *quae solidum generet quod in directione* CAL *motum pro sua capacitate patiatur minimam resistentiam.*

Tab. XXX. fig. 2.

Solutio.

Manentibus vt ante $AR = r$, et $RS = s$ ob curvam ACD datam dabitur s et etiam p posito $ds = p\,dr$ per r. Pro curua autem inuenienda sit $CG = y$ et $GH = u$, et $du = q\,dy$, quibus positis minimum esse debebit haec expressio $\iint \frac{p^3 u\,dr\,dy}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$ seu $\int u\,dy \int \frac{p^3 dr}{c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{1+p^2}{p^3} = w^2$ et $\frac{(ap-rp+s)^2}{p^3} = t^2$, ita vt quantitates t et w ab y non pendeant; eritque formula minima reddenda haec $\int u\,dy \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ in qua cum dy multiplicatum sit per $u \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2}$ sumatur eius differentiale ponendo semper r et w et t constantes, quod erit $du \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} - \int \frac{2ut^2 q\,dq\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ vbi signa summatoria tantum ad quantitates r, w, et t tanquam variabiles respicit, u vero et q ponit constan-

 tes

tes. Hinc igitur valor minimo inueniendo inferuiens erit $\int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \frac{1}{dy} d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$, qui deberet poni $= a$ nisi simul capacitas esset in computum ducenda quae maxima esse debet. At capacitas est vt $\int u^2dy$, ex qua obtinetur iste valor maximo inueniendo inseruiens $2u$. Ex his igitur valoribus sequens conficitur aequatio naturam curvae quaesitae praebens $\frac{2u}{cf} = \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \frac{1}{dy} d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$. Multiplicetur vtrinque per $du = qdy$, prodibit $\frac{2udu}{cf} = du \int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + q\, d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} = d.\, u\int \frac{dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \int \frac{2ut^2qq\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} + q\, d.\, 2uq\int \frac{t^2dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$ cuius integrale est $\frac{u^2}{cf} = \int \frac{u\,dr}{c^2w^2+t^2q^2} + \int \frac{2ut^2q^2\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} + \text{Const.} = \int \frac{u(c^2w^2+3t^2q^2)dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2} +$ Const. Quoniam vero alicubi fieri debet $u = 0$, hoc autem nusquam euenire potest nisi sit Const. $= 0$, erit $u = cf\int \frac{(c^2w^2+3t^2q^2)dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$. Verum cum sit $du = qdy$, erit $y = \frac{u}{q} + \int \frac{udq}{qq}$ est autem $\int \frac{udq}{qq} = cf\int \frac{(c^2w^2+3t^2q^2)dr\,dq}{qq(c^2w^2+t^2q^2)^2} = b - cf\int \frac{dr}{q(c^2w^2+t^2q^2)}$, vnde fit $y = b + 2cf\int \frac{t^2q\,dr}{(c^2w^2+t^2q^2)^2}$. Quamobrem restitutis loco w^2 et t^2 assumtis valoribus ista emerget curuae quaesitae constructio: $y = b + 2cf\int \frac{p^3(ap-rp+s)^2q\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$ et $u = cf\int \frac{(c^2(1+p^2)+3q^2(ap-rp+s)^2)p^3\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$. quae integrationes constructionem non impediunt, cum in iis q ponatur constans, ideoque non impediunt, quominus curua quaesita sit algebraica. Q. E. I.

Coroll. 1.

729. Quoniam u euanescit si sit $q = \infty$ intelligitur curuae BD tangentem in B ad rectam CB esse normalem, seu verticalem hoc autem casu prodit $y = b$: quare si dicatur $CB = b$, erit $b = b$.

Coroll.

Coroll. 2.

730. Quia curua ex D progrediendo verſus B ad CB accedit, habebit q vbique valorem negatiuum. Ex quo erit $y = 0$ ſi fuerit $b = -2cf\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2q\,dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^2}$.

Coroll. 3.

731. At u obtinebit maximum valorem ſi ipſi q is tribuatur valor vt fiat $0 = \int\frac{p^3(c^2(1+p^2)-3q^2(ap-rp+s)^2)(ap-rp+s)^2dr}{(c^2(1+p^2)+q^2(ap-rp+s)^2)^3}$ integratione debito modo abſoluta; ſcilicet vt euaneſcat facto $r = 0$, tumque ponatur $r = a$.

Exemplum.

732. Sit ſectio diametralis ACD triangulum ad C rectangulum, ſeu ASD linea recta, erit $s = \frac{cr}{a}$, et $p = \frac{c}{a}$, atque $1 + pp = \frac{aa+cc}{aa}$, itemque $ap - rp + s = c$; his ſubſtitutis erit $\int\frac{p^3(ap-rp+s)^2q\,dr}{(cc(1+pp)+q^2(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{acq\,dr}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$ $= \frac{a^2cq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$; atque $\int\frac{p^3(c^2(1+p^2)+3q^2(ap-rp+s)^2)dr}{(cc(1+pp)+qq(ap-rp+s)^2)^2} = \int\frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)dr}{a(a^2+c^2+a^2q^2)^2} = \frac{c(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Quocirca pro curua BCD quae ſolidum producit quod pro maxima capacitate minimam patitur reſiſtentiam iſta obtinebitur aequatio $y = b + \frac{2a^2c^2fq}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$ cui reſpondet $u = \frac{ccf(a^2+c^2+3a^2q^2)}{(a^2+c^2+a^2q^2)^2}$. Habebit ergo u maximum valorem ſi capiatur $q = \pm\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{a\sqrt{3}}$. Si igitur maximus ipſius u valor ponatur $CD = c$, fiet $f = \frac{8(a^2+c^2)}{9c}$ deinde quia hoc caſu y euaneſcere debet fiet $b = \frac{ac}{\sqrt{(a^2+c^2)}}$; ex quibus natura et figura curuae deſideratae facile cognoſcitur. Simul autem intelligitur hanc curvam fore algebraicam.

PROPOSITIO 70.
Problema.

Tab. XXXI. fig. 1.

733. *Si datae fuerint cum sectio amplissima* BDC *tum sectio aquae* ACB , *atque huic sectioni aquae omnes sectiones horizontales* FIH *sint similes*, *determinare resistentiam*, *quam hoc corpus secundum directionem* CAL *in aqua motum patietur.*

Solutio.

Quoniam curua AVB est data, ponatur pro ea abscissa $CT = t$ et applicata $TV = u$, dabiturque aequatio inter u et t, atque posito $du = q\,dt$, erit q functio quaedam ipsius t. Porro pro curua DHB ponatur abscissa $CG = r$, et applicata $GH = z$, quoniam haec applicata GH aequalis erit tertiae variabilium trium x, y, z, quae in aequationem pro superficie ingredientur; sit autem $dz = pdr$, ita vt p futura sit functio ipsius r. Si nunc constantes quantitates vocentur $AC = a$, $CB = Cb = b$ et $CD = c$, erunt CB, b et $HI = r$ latera homologa figurarum similium ACB et FIH; quare si capiatur $b : r = t : IK$ vt sit $IK = \frac{rt}{b}$, erit $KQ = \frac{ru}{b}$. Dictis vero $AP = x$, $PM = y$, et $MQ + z$; erit $x = a - \frac{rt}{b}$; $y = \frac{ru}{b}$, et $z = z$ quarum priores aequationes dant $dx = \frac{-rdt - tdr}{b}$ et $dy = \frac{rqdt + udr}{b}$ ex quibus fit $dr = \frac{bdy + bqdx}{u - tq}$ et $dt = \frac{-budx - btdy}{r(u - tq)}$. Iam cum sit $dz = pdr$, erit $dz = \frac{bpqdx + bpdy}{u - tq}$, quae aequatio exprimit naturam superficiei propositae. Haec igitur aequatio cum assumta generali $dz = Pdx + Qdy$ comparata dat $P = \frac{bpq}{u - tq}$ et $Q = \frac{bp}{u - tq}$, vnde fit $1 + P^2 + Q^2 =$

$= \frac{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}{(u-tq)^2}$. Ad valorem iam ipsius $\frac{P^3dxdy}{1+P^2+Q^2}$ inveniendum, notari debet, dum dy consideratur, dx tanquam constans tractari debere; facto autem $dx = 0$ fit $dr = \frac{-rdt}{t}$, adeoque $dy = \frac{-rudt}{bt} + \frac{rqdt}{b} = \frac{-rdt(u-tq)}{bt}$; atque dum dx consideratur, dy constans est ponendum seu $dt = \frac{-udr}{rq}$ vnde fit $dx = \frac{+udr}{bq} - \frac{tdr}{b} = \frac{dr(u-tq)}{bq}$. Sed cum hinc non pateat quomodo variabiles r et t a se inuicem discerni debeant, oportebit loco alterutrius elementorum dx et dy inducere tertium elementum dz, cum id in assumtis quantitatibus variabilibus ipsum contineatur. Est autem $dxdy = \frac{dzdx}{Q} = \frac{dzdy}{P}$; nam dum x tanquam constans consideratur loco dy scribi potest $\frac{dz}{Q}$, et dum y constans assumitur loco dx scribere licet $\frac{dz}{P}$ ex quibus hanc nanciscimur formulam $\frac{P^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$, quae bis integrari debet, altera integratione ponendo z altera y constans. At est $dz = pdr$, et si z constans ponitur fit $dy = \frac{rqdt}{b}$; quamobrem fiet formula generalis $\frac{P^2dzdy}{1+P^2+Q^2}$ pro nostro casu $= \frac{bp^3q^3rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$ quae bis integrari debet altera vice ponendo r, altera t constans. Ac primo quidem vtraque integratio ita est instituenda vt integrale euanescat, posito vel r vel t, prout vel r vel t pro variabili est sumta $= 0$, tumque faciendum est vel $r = b$ vel $t = a$. His igitur de modo integrationum praemonitis si altitudo celeritati, qua corpus progreditur debita ponatur $= v$, erit resistentiae vis horizontalis repellens corpus secundum directionem AC $= 2bv \iint \frac{p^2q^3rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Deinde vis verticalis ex resistentia orta, quae est $\iint \frac{P^2dxdy}{1+P^2+Q^2} = 2v \iint \frac{Pdzdy}{1+P^2+Q^2}$ fiet pro nostro casu $= 2v \iint \frac{p^2q^2rdrdt(u-tq)}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq^2)^2}$ quae applicata erit in

puncto

puncto O axis AC, cuius distantia a puncto A reperietur si diuidatur $\iint \frac{(ab(u-tq)-rt(u-tq)+b^2pqz)p^2q^2rdrdt}{b(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$, praescripto modo euolutum per $\iint \frac{(u-tq)p^2q^2rdrdt}{b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2}$. Hisque cognitis totius resistentiae effectus cognoscetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

734. Figura sectionis diametralis AFD hinc facillime ex curua CBD definitur. Nam quoniam est BC:HI = AC:FI applicatae FI et HI eidem abscissae CI respondentes datam inter se tenent rationem; ex quo curua AFD affinis erit curuae BHD

Coroll. 2.

735. Hancobrem problema, quo loco curuae BHD data fuisset curua AFD, sectiones vero omnes horizontales inter se sint similes, vt in praesente quaestione, simili modo resoluetur, atque adeo solutio ab hac non differet nisi scribendo a loco b siquidem r et z denotent coordinatas curuae DFH

Coroll. 3.

736. Cum soliditas in genere sit $= -2\iint Q\,y\,dx\,dy = -2\iint Q\,dx\,dz$ posito $\frac{dx\,dz}{Q}$ loco $dx\,dy$; fiet pro nostro casu soliditas $= \frac{2}{bb}\iint pr^2u\,dr\,dt = \frac{2}{bb}\int pr^2dr\int u\,dt$. Cum igitur $\int u\,dt$ exprimat aream ACB, dicatur ea $= ff$, erit soliditas $= \frac{2ff}{bb}\int pr^2dr = \frac{2ff}{bb}\int r^2dz$ posito $r = b$ post integrationem ita absolutam vt prodeat 0, si fiat $r = 0$.

Coroll.

Coroll. 4.

737. Superficies autem ABDb in aquam incurrens generaliter eſt $2\iint dx\,dy\sqrt{(1+P^2+Q^2)} = 2\iint \frac{dxdz}{Q}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. quamobrem noſtro caſu haec ſuperficies exprimetur hac forma $2\iint \frac{rdrdt}{bb}\sqrt{(b^2p^2(1+q^2)+(u-tq)^2)}$.

Coroll. 5.

738. Colligere etiam licet, quoties curuae CBD et CAD fuerint affines, toties corporis omnes ſectiones horizontales eſſe inter ſe ſimiles. Cum igitur ſectiones verticales ſectioni CBD parallelae ſimiles ſint, quando curvae CBA et CDA fuerint affines; intelligitur ſi tres curvae CBD, CAD et CAB fuerint inter ſe affines, tum omnes ſectiones vnicuique illarum ſectionum parallelas inter ſe ſimiles fore.

Scholion.

739. Quo appareat, quomodo formulae differentiales ſupra datae in quibus $dxdy$ ineſt, ad alias reduci queant in quibus vel $dxdz$ vel $dydz$ inſit, notandum eſt $dxdy$ ideo eſſe in illas formulas ingreſſum, quod inerat in elemento ſuperficiei $dxdy\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Quoniam autem hoc elementum natum eſt ex aequatione canonica $dz = Pdx + Qdy$ ſimili modo ex iſta aequatione canonica $dy = \frac{dz}{Q} - \frac{Pdx}{Q}$ naſcetur hoc ſuperficiei elementum $\frac{dxdz}{Q}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$, atque ex hac aequatione $dx = \frac{dz}{P} - \frac{Qdy}{P}$ Prodit elementum ſuperficiei iſtud $\frac{dydz}{P}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}$. Cum igitur haec tria elementa bis integrata praebeant totam ſuperficiem, manifeſtum eſt ea ſibi mutuo ſubſtitui poſſe. Hancobrem

obrem formulae pro resistentia supra inuentae in alias formas aequiualentes reduci possunt, quibus illarum loco vti licebit. Ita resistentiae vis horizontalis quae supra inuenta erat $= 2v \iint \frac{P^3 dydx}{1+P^2+Q^2}$ quoque hoc modo $2v \iint \frac{P^2 dydz}{1+P^2+Q^2}$ siue hoc modo $2v \iint \frac{P^3 dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$ exprimi poterit. Simili modo vis resistentiae verticalis tribus hisce diuersis modis exprimi potest; erit scilicet vel $2v \iint \frac{P^2 dxdy}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v \iint \frac{P dydz}{1+P^2+Q^2}$ vel $2v \iint \frac{P^2 dxdz}{Q(1+P^2+Q^2)}$; ex quibus formulis quouis casu oblato iis vti conueniet, quae pro ratione quantitatum variabilium ita sunt comparatae, vt alterutra variabilium in formula contentarum ab vnica variabilium assumtitiarum pendeat. Ita in hoc casu opus erat eiusmodi formulis vti in quibus inesset dz, quia z inter ipsas variabiles assumtas reperiebatur.

Exemplum.

740. Sint omnes sectiones horizontales HF*b* semicirculi, seu solidum genitum ex rotatione figurae CBD circa axem CD, erit figura CBA quadrans circuli et propterea $b = a$, atque ex circuli natura $u = \sqrt{(a^2 - t^2)}$ et $q = \frac{-t}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$ atque $u - tq = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-t^2)}}$, et $1 + qq = \frac{a^2}{a^2 - t^2}$; His substitutis erit resistentiae vis horizontalis in directione AC motum retardans $= \frac{-2v}{a^3} \iint \frac{p^3 t^3 rdrdt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2v}{a^3} \cdot \int \frac{t^3 dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} \int \frac{p^3 rdr}{1+pp}$ vbi variabiles t et r a se inuicem sunt separatae. Signum quidem haec formula haberet negatiuum, sed eius loco $+$ tuto substituitur cum transformatio formularum generalis pendeat a signo radicali, in quod vtrumque signum aequaliter competit. At est $\int \frac{t^3 dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2}{3} a^3$ posito

post

post integrationem $t = a$, vnde vis resistentiae horizontalis est $= \frac{4}{3} v \int \frac{p^3 r dr}{1+pp}$. Simili modo erit vis resistentiae verticalis $= \frac{2v}{c^2} \iint \frac{p^2 t^2 r dr dt}{(1+pp)\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{2v}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} \int \frac{p^2 r dr}{1+pp} = \frac{\pi v}{2} \int \frac{p^2 r dr}{1+pp}$. quia est $\int \frac{tt\,dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = \frac{\pi}{4}$. De loco autem applicationis $\underline{o}$, quia formula minus fit simplex non erimus solliciti.

Coroll. 1.

741. Si idem hoc solidum inuertatur vt BDb fiat sectio aquae et BAb sectio amplissima, atque hoc solidum in directione CD celeritate altitudini $\underline{v}$ debita promoueatur tum resistentia motum retardans erit $= \pi v \int \frac{rdr}{1+p^2}$. Hoc enim casu omnes sectiones verticales axi CD normales erunt semicirculi.

Coroll. 2.

742. Resistentia ergo huius corporis, si mouetur secundum directionem CA se habebit ad resistentiam eiusdem corporis moti in directione CD vt $\frac{4}{3} \int \frac{p^3 r dr}{1+pp}$ ad $\pi \int \frac{rdr}{1+pp}$.

Coroll. 3.

748. Si ergo figura BDb abeat in triangulum isosceles, seu corpus in semiconum rectum axis CD atque ponatur $CD = c$ existente $BC = AC = a$. erit $z = c - \frac{cr}{a}$ et $o = -\frac{c}{a}$. Resistentia ergo quam hic conus in directione CA motus patietur erit $= -\frac{4v}{3a} \int \frac{c^3 rdr}{a^2+c^2} = \frac{2ac^3 v}{3(a^2+c^2)}$, neglecto signo vt iam notaui.

Coroll. 4.

744. Resistentia autem, quam idem semiconus in directione axis CD motus sufferet, erit $= \pi v \int \frac{a^2 r dr}{a^2+c^2} = \frac{\pi a^4 v}{2(a^2+c^2)}$.

$\frac{\pi a^4 v}{2(a^2+c^2)}$. Quare haec reſiſtentia ſe habet ad priorem vt $\frac{\pi a^3}{2}$ ad $\frac{2c^3}{13}$. Vnde hae duae reſiſtentiae inter ſe erunt aequales ſi fuerit $c^3 = \frac{3\pi a^3}{4}$. ſeu $\frac{c}{a} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$. ſiue ſi ſit CD : CB $= \sqrt[3]{6\pi} : 2 = 2,661341 : 2$ vnde fit proxime CD : CB $= 4 : 3$.

Coroll. 5.

745. Si ponatur ſectio BDb etiam ſemicirculus, ita vt corpus fiat quadrans ſphaerae, vtraque reſiſtentia debebit eſſe eadem. Oritur autem ob $z = \sqrt{(a^2 - r^2)}$ et $p = \frac{-r}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ reſiſtentia pro motu ſecundum CA $= \frac{4}{3} v \int \frac{r^4 dr}{a^2 \sqrt{(a^2-r^2)}} = \frac{2\pi a^2 v}{13}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\pi a^2 v}{4}$. Pro motu autem ſecundum directionem CD erit reſiſtentia $= \pi v \int \frac{r dr (a^2 - r^2)}{a^2} = \frac{\pi a^2 v}{4}$.

Scholion.

746. Abſoluimus igitur his propoſitionibus omnes caſus quibus corporis ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales eaeque vel ſectioni diametrali vel ampliſſimae parallelae ſunt ſimiles inter ſe. Atque ad huiusmodi corpora determinanda opus fuit trium ſectionum principalium ſcilicet ſectionis aquae, ſectionis ampliſſimae atque ſectionis diametralis duas tanquam datas aſſumere, quia ex hac conditione tertia ſectio ſponte determinatur. Dantur autem praeter has corporum ſpecies, quae ſectiones quasdam inter ſe parallelas ſimiles habent, innumerabiles aliae corporum ſpecies, quibus euoluendis nec locus nec tempus ſuppeteret. Harum vero primarias aliquas ſpecies examini ſubiicere iuuabit, quae ad nauium figuras prope accedant.

cedant. Eiusmodi ſcilicet ſpecies contemplabimur, in quibus ſectiones inter ſe parallelae vel horizontales vel verticales ſint affines, cuius vocis ſignificationem hic in multo latiore ſenſu accipimus quam vocem ſimilitudinis. Figuras enim affines vocamus, in quibus ſumtis abſciſſis in data ratione, applicatae reſpondentes quoque conſtantem teneant rationem, ex qua definitione intelligitur figuras ſimiles ſub affinibus tanquam ſpeciem contineri, figurae enim affines euadunt ſimiles, ſi applicatae eandem rationem teneant, quam abſciſſae; affines autem et non ſimiles prodeunt figurae, ſi rationes abſciſſarum et applicatarum fuerint inaequales. Sic omnes ellipſes inter ſe ſunt figurae affines, quoniam abſciſſis in ratione axium transuerſorum aſſumtis reſpondent applicatae rationem axium coniugatorum tenentes ſi quidem abſciſſae in axibus transuerſis capiantur. Similiquoque modo omnia triangula rectangula figurae ſunt inter ſe affines. Data igitur curua quacunque datam baſin datamque altitudinem habente, facile erit aliam ipſi affinem deſcribere, quae baſin quamcunque et altitudinem quamcumque praeſcriptam habeat. Nam ſi datae curuae baſis ſit $= a$ et altitudo $= b$, abſciſſaque quaecunque in baſi accepta vocetur x, eique reſpondens applicata altitudini parallela ſit y, hoc modo ſuper baſi alia A ad aliam altitudinem B conſtruetur curua affinis, in baſi A ſumatur abſciſſa $= \frac{Ax}{a}$, atque reſpondens applicata $= \frac{By}{b}$, eritque curva hoc modo deſcripta priori affinis. His igitur notatis non difficile erit ſequentia problemata aggredi.

PROPOSITIO 71.
Problema.

Tab. XXXI. fig. 2.

747. *Sint omnes tres principales sectiones datae, scilicet sectio aquae* ACB *sectio amplissima* BCD *atque sectio diametralis* ACD; *solidum vero ita sit comparatum, vt omnes sectiones* STP *sectioni amplissimae* BDC *parallelae eidem sint affines, hocque corpus in aqua moueatur secundum directionem* CAL: *determinare resistentiam, quam patietur.*

Solutio.

Cum primum sectio diametralis ATD data sit, ponatur pro ea abscissa CP $= r$, et applicata PT $= s$, dabiturque relatio inter r et s sitque $ds = pdr$. Secundo ob curuam CBA seu sectionem aquae datam, ponatur pro ea abscissa CP $= t$, et applicata PS $= u$, sitque $du = qdt$. Tertio pro sectione amplissima CBD sit abscissa CG $= \tau$ et applicata GH $= \upsilon$, atque $d\upsilon = \varrho d\tau$. His pro curuis datis positis concipiatur sectio quaecunque SPT sectioni BCD parallela, quae ex natura solidi affinis erit ipsi sectioni BCD; atque ad solidi indolem exprimendam accipiantur hae tres variabiles AP $= x$, PM $= y$ et MQ $= z$ eritque prioribus notationibus ad hunc casum accommodatis $t = r$, atque $x = a - r$ posita longitudine AC $= a$. Iam cum sectionis SPT basis sit PS $= u$ et altitudo PT $= s$; sectionis vero BCD ponatur basis BC $= b$ et altitudo CD $= c$; hinc ob affinitatem si sit PM, $y = \frac{u\tau}{b}$ erit MQ, $z = \frac{s\upsilon}{c}$. Nunc ob $x = a - r$ erit $dr = -dx$; atque $dy = \frac{ud\tau + \tau qdr}{b}$ propter $t = r$ et $dz = \frac{s\varrho d\tau + \upsilon pdr}{c}$. Cum igi-

igitur fit $d\tau = \frac{b\,dy}{u} + \frac{\tau q\,dx}{u}$ ob $dr = -dx$ fiet $dz = \frac{(s\tau q\rho - u\upsilon p)dx}{cu} + \frac{bs\varrho dy}{cu}$, quae aequatio cum generali fupra affumta $dz = \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy$ comparata dat $\mathrm{P} = \frac{s\tau q\rho - u\upsilon p}{cu}$ et $\mathrm{Q} = \frac{bs\rho}{cu}$, vnde fit $1 + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 = \frac{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\upsilon p)^2}{c^2u^2}$. Accedamus nunc ad formulas $\frac{\mathrm{P}^3dxdy}{1+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}$. $\frac{\mathrm{P}^2dxdy}{1+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}$ et $\frac{\mathrm{P}^2(x+\mathrm{P}z)dxdy}{1+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}$ pro viribus refiftentiae et directione determinandis inuentas, quae duplicem integrationem requirunt, alteram in qua x alteram in qua y ponatur conftans. Cum igitur fit $dx = -dr$, atque pofito x conftante fiat $dy = \frac{ud\tau}{b}$; hi valores fubftituantur loco dx et dy, vt fiat $dxdy = -\frac{udrd\tau}{b}$; ac fi in illis formulis integratio inftituatur pofito r conftante, fimul conftantes erunt quantitates ab r pendentes velut s, t, u, p, q. in altera vero integratione in qua τ ponitur conftans, conftantes infuper erunt υ et ϱ. Integratio autem in qua r ponitur conftans ita abfoluatur vt integrale euanefcat pofito $\tau = 0$, tumque ponatur $\tau = b$ feu $\upsilon = 0$. fimili modo altera integratio in qua τ conftans ponitur eft abfoluenda, vt integrale euanefcat pofito $r = 0$, hocque facto ponatur $r = a$. Perinde autem eft a quanam integratione incipiatur, cum variabiles r et τ, reliquaeque, quae per has duas dantur, a fe inuicem non pendeant. His igitur praemiffis obtinebitur refiftentiae vis horizontalis motui contraria et fecundum directionem AC vrgens $= \frac{-2v}{bc}\iint\frac{(s\tau q\rho - u\upsilon p)^3 drd\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\rho^2 + (s\tau q\rho - u\upsilon p)^2}$. vis vero refiftentiae verticalis, qua corpus furfum vrgetur erit $= \frac{-2v}{b}\iint\frac{(s\tau q\rho - u\upsilon p)^2 udrd\tau}{c^2u^2 + b^2s^2\varrho^2 + (s\tau q\rho - u\upsilon p)^2}$. Punctum autem Θ, in quo haec vis applicata eft concipienda reperietur diuidendo hanc expref-

expressionem $\iint \frac{P^2(x+Pz)udrd\tau}{1+P^2+Q^2}$ per istam $\iint \frac{P^2udrd\tau}{1+P^2+Q^2}$, quotus enim dabit interuallum AO. Q. E. I.

Coroll. 1.

748. Cum soliditas ingenere sit $=-2\iint Qydxdy$ pro nostro casu autem sit $-dxdy=\frac{udrd\tau}{b}$, $y=\frac{u\tau}{b}$ et $Q=\frac{bs\rho}{cu}$; erit nostri solidi capacitas $=\frac{2}{bc}\iint us\tau\varrho drd\tau=\frac{2}{bc}\int usdr\int\tau\varrho d\tau$. Est vero $\int\tau\varrho d\tau=\int\tau d\vartheta=-$ area BCD haec ergo area si dicatur ff erit soliditas $=\frac{-2ff}{bc}\int usdr$.

Coroll. 2.

749. Si sectio diametralis ACD affinis sit sectioni aquae, tum omnes sectiones ipsi BCD parallelae simul erunt similes. Tum autem fit $s:u=c:b$ atque $u=\frac{bs}{c}$ et $q=\frac{bq}{c}$, quibus valoribus substitutis prodeunt supra inventae expressiones pro sectionibus similibus.

Coroll. 3.

750. Si linea DTA abeat in rectam horizontalem fiet $s=c$ et $p=0$, hinc resistentiae vis horizontalis fiet $=\frac{-2v}{b}\iint\frac{\tau^3q^3\rho^3drd\tau}{u^2+b^2\rho^2+\tau^2q^2\rho^2}$. Atque si area ACB ponatur $=gg$, existente area $BCD=ff$ erit soliditas huius corporis $=\frac{2ffgg}{b}$.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tab. XXX. fig. 2.

751. *Sint iterum datae tres sectiones principales* ACB, ACD et BCD, *atque omnes sectiones* FGH *sectioni di-*

diametrali ACD *parallelae eidem sectioni sint affines: hocque corpus moueatur in aqua secundum directionem* CAL; *determinare resistentiam quam patietur.*

Solutio.

Sit iterum vt ante pro sectione diametrali ACD abscissa CR $= r$ et applicata RS $= s$ atque $ds = p\,dr$. Deinde pro sectione aquae CBA sit abscissa in AC sumta ipsique GF aequalis $= t$ et ei applicata respondens, quae aequalis erit CG sit u atque $du = q\,dt$. Pro tertia denique sectione BCD sit abscissa CG $= \tau$ et applicata GH $= ȣ$ existente $dȣ = \varrho\,d\tau$. Si nunc concipiatur sectio verticalis FGH parallela sectioni diametrali ACB fiet $u = \tau$, et $d\tau = q\,dt$, vnde τ, q, u, $ȣ$ et ϱ functiones erunt ipsius t ab eoque pendebunt, eritque $dȣ = q\varrho\,dt$. Positis ergo AC $= a$, BC $= b$ et CD $= c$, quoniam figura FGH affinis est figurae ACD sumatur in ea abscissa GM $= \frac{tr}{a}$ eritque applicata MQ $= \frac{ȣ s}{c}$. Quamobrem si vocentur AP $= x$, PM $= y$ at MQ $= z$; erit $x = a - \frac{tr}{a}$, $y = \tau = u$; et $z = \frac{ȣ s}{c}$. Cum igitur sit $dy = q\,dt$, seu $dt = \frac{dy}{q}$, erit $dx = \frac{-r\,dy}{aq} - \frac{t\,dr}{a}$ et $dz = \frac{ȣ p\,dr}{c} + \frac{sq\varrho\,dt}{c} = \frac{ȣ p\,dr}{c} + \frac{s\varrho\,dy}{c}$, unde fit $dz = \frac{-aȣ p\,dx}{ct} + \frac{(tsq\varrho - rȣ p)dy}{ctq}$; quae cum generali aequatione $dz = P\,dx + Q\,dy$ comparata dat $P = \frac{-aȣ p}{ct}$ et $Q = \frac{tsq\varrho - rȣ p}{ctq}$ atque $1 + P^2 + Q^2 = \frac{c^2t^2q^2 + a^2ȣ^2p^2q^2 + (tsq\varrho - rȣ p)^2}{c^2t^2q^2}$. Quod autem ad formulas differentiales attinet in quibus est $dx\,dy$ atque x et y a se inuicem non pendere, ponuntur; cum sit $dy = q\,dt$, ideoque y a solo t pendet erit $dx = \frac{-t\,dr}{a}$; ob $dy = 0$, quando de dx est quaestio. Erit ergo

go $dxdy = \frac{-tqdrdt}{a}$, atque reſiſtentiae vis horizontalis ſecundum directionem AC ſollicitans erit $= \frac{2a^2v}{c} \iint \frac{\text{ȣ}^3 p^3 q^3 dr dt}{c^2 t^2 q^2 + a^2 \text{ȣ}^2 p^2 q^2 + (tsq\varrho - r\text{ȣ} p)^2}$ vbi duplici integratione opus eſt, altera in qua ponitur t conſtans, cum eoque u, ȣ, q et ϱ in altera vero ponitur r conſtans cum ſuis functionibus s et p. Simili vero modo erit vis reſiſtentiae verticalis $= -2av \iint \frac{\text{ȣ}^2 p^2 q^3 drdt}{c^2 t^3 q^2 + a^2 \text{ȣ}^2 t p^2 q^2 + t(tsp\varrho - r\text{ȣ} p)^2}$ cuius locus applicationis erit punctum O, eiusque interuallum AO erit quotus qui reſultat ex diuiſione huius quantitatis $\iint \frac{P^2(x + Pz)tqdr\,dt}{1 + P^2 + Q^2}$ per hanc $\iint \frac{P^2 tqdrdt}{1 + P^2 + Q^2}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

752. Soliditas huius corporis reperietur ex formula generali $-2\iint Qydxdy$, quae pro noſtro caſu tranſit in hanc $\frac{2}{ac}\iint (tsuq\varrho drdt - ru\text{ȣ} pdrdt)$ quae primo integrata poſito t conſtanti, dat $\frac{2ff}{ac}\int (tuq\varrho + u\text{ȣ})dt = \frac{2ff}{ac}\int t\text{ȣ} du$ ob $q\varrho dt = d\text{ȣ}$; denotante ff aream ACD.

Coroll. 2.

753. Si curuae CBA et CBD fuerint affines hoc eſt GF : GH $= a : c$, ita vt ſit $\text{ȣ} = \frac{ct}{a}$ et $q\varrho = \frac{c}{a}$, omnes ſectiones FGH fierent inter ſe ſimiles, atque reſiſtentia corporis horizontalis erit $= 2av \int \frac{tp^3 q^3 drdt}{a^2 q^2(1 + p^2) + (s - rp)^2}$ vti iam ex ſuperioribus conſtat.

Coroll. 3

754. Si curua BD abeat in rectam ipſi BC parallelam, ita vt ſectio ampliſſima BDb fiat rectangulum, erit $\text{ȣ} = c$ et $\varrho = 0$; huiusmodi ſolidi ergo reſiſtentia horizontalis ſeu motum retardans eſt $= 2a^2v \iint \frac{p^3 q^3 drdt}{a^2 p^2 q^2 + r^2 p^2 + t^2 q^2}$.

Co-

Coroll. 4.

755. Quoniam in hac expreſſione p et q, itemque r et t aequaliter inſunt, intelligitur ſectiones ACB et ACD eadem manente reſiſtentia inter ſe commutari poſſe. Si quidem ſectio ampliſſima fuerit parallelogrammum rectangulum.

Coroll. 5.

756. Si inſuper ſectiones ACB et ACD fiant triangula rectangula, quo caſu ſolidum abit in piramidem, curuilineam cuius baſis erit rectangulum, vertex vero A. Cum igitur hoc caſu ſit $u = b - \frac{bt}{a}$ hincque $q = -\frac{b}{a}$; et $s = c - \frac{cr}{a}$ hincque $p = -\frac{c}{a}$ erit reſiſtentia huius corporis $= \frac{2b^3c^3v}{a^2} \iint \frac{drdt}{b^2c^2 + b^2t^2 + c^2r^2} = \frac{2b^2c^2v}{a^2} \int \frac{dr}{\sqrt{(b^2+r^2)}}$ A tang. $\frac{ab}{c\sqrt{(a^2+r^2)}}$.

PROPOSITIO 73.

Problema.

757. *Datae ſint denuo tres ſectiones principales* ACB, ACD *et* BCD, *atque corpus* ABDb *ita ſit comparatum, vt omnes ſectiones horizontales* FHI *ſint inter ſe affines: moueaturque hoc corpus ſecundum directionem* AC *in aqua: determinare reſiſtentiam quam patietur.*

Tab. XXXI. fig. 1.

Solutio.

Sit primo pro ſectione diametrali ACD abſciſſa in axe CA aſſumta ipſique IF aequalis $= r$ eique reſpondens applicata quae erit $=$ CI $=$ GH $= s$, ſitque $ds = pdr$. Tum pro ſectione aquae CBA ſit abſciſſa CT $= t$ et applicata TV $= u$ ſitque $du = qdt$. Tertio pro ſectione am-

amplissima sit abscissa CG $= \tau$ et applicata GH $= \text{ȣ}$ existente $d\text{ȣ} = \varrho d\tau$. Si nunc concipiatur sectio horizontalis quaecunque FIH, superiores denominationes ad eam applicatae praebebunt $\text{ȣ} = s$ indeque $pdr = \varrho d\tau$. Quoniam autem sectio FIH affinis est sectioni ACB, si ponatur AC $= a$ BC $= b$ et CD $= c$, sumaturque IK $= \frac{rt}{a}$ erit respondens applicata KQ $= \frac{\tau u}{b}$. Si nunc ponatur AP $= x$, PM $= y$ et MQ $= z$ erit $x = a - \frac{rt}{a}$, $y = \frac{\tau u}{b}$ et $z = \text{ȣ} = s$: vnde fit $dz = pdr$; $dy = \frac{\tau q dt}{b} + \frac{updr}{b\rho}$, ob $d\tau = \frac{pdr}{\rho}$, et $dx = \frac{-rdt}{a} - \frac{tdr}{a}$; ex quibus sequens aequatio inter x, y et z conficitur $dz = \frac{bpr\rho dy + a\tau pq\rho dx}{urp - t\tau q\rho}$ quae cum generali aequatione supra assumta comparata dat $P = \frac{a\tau pq\rho}{urp - t\tau q\rho}$ et $Q = \frac{brp\rho}{urp - t\tau q\rho}$ ita vt sit $1 + P^2 + Q^2 = \frac{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho^2)}{(urp - t\tau q\rho)^2}$ Iam quoniam z per vnicam constitutarum variabilium determinatur, eiusmodi formulas ad resistentiam inueniendam assumere conuenit in quibus sit dz. Cum enim sit $dz = pdr$, et posito z seu r constante fiat $dy = \frac{\tau q dt}{b}$, erit $dzdy = \frac{\tau pqdrdt}{b}$, in qua duae variabiles a se inuicem non pendentes insunt, altera r et quantitates per eam datae s, p, ȣ, τ et ϱ, altera vero t, cum u et q, quae in integrationibus probe a se inuicem sunt secernendae, ita dum alterae variabiles ponuntur, alterae tanquam constantes tractentur. Cum iam vis resistentiae horizontalis seu secundum directionem AC vrgens sit $= 2v \iint \frac{P^2 dzdy}{1 + P^2 + Q^2}$, fiet haec resistentia pro nostro casu $= \frac{2a^2v}{b} \iint \frac{\tau^3p^3q^3\rho^2 drdt}{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho)^2}$ quae vti iam saepius est praeceptum, debito modo bis debet integrari. At resistentiae vis verticalis fit $= \frac{2av}{b} \iint \frac{\tau^2p^2q^2\rho drdt(urp - t\tau q\rho)}{p^2\rho^2(a^2\tau^2q^2 + b^2r^2) + (urp - t\tau q\rho)^2}$ locus autem seu punctum O

vbi

vbi haec vis applicata eſt concipienda, reperietur eo modo, quem generaliter dedimus, ſcilicet interuallum AO eſt quotus, qui reſultat ſi $\iint \frac{P(x+Pz)\tau p q d r d t}{1+P^2+Q^2}$ diuidatur per $\iint \frac{P\tau p q d r d t}{1+P^2+Q^2}$, integrationibus vtrisque legitimo modo abſolutis. Q. E. I.

Coroll. 1.

758. Ad ſoliditatem huius ſolidi inueniendam conſiderari oportet hanc expreſſionem $-2\iint y\, dx dz$; pro qua applicanda quoniam eſt $dz = pdr$ et poſito z conſtante $dx = \frac{-rdt}{a}$ atque $y = \frac{\tau u}{b}$ fiet ſoliditas $= \frac{2}{ab} \iint \tau u r p d r d t = \frac{2}{ab} \int udt. \int \tau r p dt$.

Coroll. 2.

759. Quoniam vero $\int u d t$ integratum dat aream ACB, quae ſi dicatur $= ff$ erit ſoliditas $= \frac{2ff}{ab} \int \tau p r d r = \frac{2ff}{ab} \int \tau r ds$ ob $pdr = ds$ ſeu eſt $= \frac{2ff}{ab} \int \tau r d\sigma$ ob $d\sigma = ds$, quae integratio ab vtriusque curuae CDA et CDB natura pendet.

Coroll. 3.

760. Si fiat linea AFD recta verticalis erit $r = a$ et $p = \infty$, vnde reſiſtentia horizontalis, poſtquam in formula inuenta poſitum erit $\varrho d \tau$ loco pdr, prodit $= \frac{2v}{b} \iint \frac{\tau^3 q^3 du\, d\tau}{b^2+u^2+\tau^2 q^2}$.

Scholion

761. Hisce ſatis prolixe reſiſtentiam, quam corpora plano diametrali praedita in aqua directe promota patiuntur, ſumus proſecuti; vix enim figura, quae quidem ad naues eſſet idonea concipi poterit, quae non in per-

 tracta-

tractatis corporum ſpeciebus contineatur. Ordo igitur requireret vt etiam, vti in figuris planis fecimus ad motum obliquum conſiderandum progrederemur, ſed cum in figuris planis haec tractatio tam difficilis extitiſſet, multo maiori difficultati, quando de corporibus quaeſtio agitatur, haec inquiſitio foret obnoxia, et praeterea ſi quid de directione vis reſiſtentiae per prolixiſſimos calculos erueretur, tamen parum vtilitatis inde ad nauium perfectionem conſequeremur. Quamobrem his cauſis impediti iſti capiti finem imponere cogimur, id quod ſine notabili in ſequentibus incommodo facere poſſumus, cum ea quae de figuris planis ſi motu obliquo promoueantur, ſunt prolata, ſatis prope media directio reſiſtentiae et centrum reſiſtentiae aeſtimari queat.

Caput

Caput Septimum
DE
MOTV PROGRESSIVO CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

PROPOSITIO 74.
Problema.

762. *Si corpus quodcunque plano diametrali verticali praeditum in aqua quiescente moueatur cursu directo, determinare eius motus quo moueri coepit, diminutionem a resistentia aquae ortam, atque celeritatem in singulis locis viae, quam describet.*

Tab. XXXII. fig. 1.

Solutio.

Quoniam corpus plano diametrali verticali praeditum ponitur, eius partis submersae, quippe quae per illud planum diametrale in duas partes similes et aequales diuiditur, centrum magnitudinis in ipso hoc plano situm erit ex quo etiam centrum grauitatis totius corporis in hoc plano collocatum esse oportet. Quia vero porro hoc corpus cursum directum tenere ponitur, ita vt moueatur secundum directionem horizontalem in ipso plano diametrali positam, media directio resistentiae in hoc ipsum planum cadet. Vis resistentiae horizontalis igitur directioni motus erit directe contraria, et hancobrem solum motum retardabit, directionem motus vero non afficiet. Vis resistentiae vero verticalis si quae adest neque motum corporis

poris neque eius directionem turbabit, ſed in corpore alleuando tantum conſumetur. Deinde niſi reſiſtentiae media directio per ipſum corporis centrum grauitatis tranſeat, corpus circa axem latitudinalem inclinabit, qua inclinatione neque motus directio neque poſitio ſpinae ſeu axis nauis a prora ad puppim ductus mutabitur. Quamobrem a reſiſtentia aquae motus aliter non turbabitur, niſi diminutione celeritatis; ac tam motus directio, quam curſus directus conſeruabitur. His notatis ſit AEBF ſectio corporis horizontalis per eius centrum grauitatis G facta, AB recta horizontalis in plano diametrali a prora A ad puppem B extenſa quae ſimul directionem motus repraeſentabit, atque recta CGL repraeſentabit viam in qua centrum grauitatis ingredietur, in qua ſimul tum prora A tum puppis B perpetuo ſitae manebunt. Ponamus nunc corpus egreſſum eſſe ex puncto C, vbi celeritatem initialem habuerit altitudini k debitam; dum vero corporis centrum grauitatis in G verſatur, ſit eius celeritas, qua in directione ſua GL moueri perget debita altitudini v. Sit porro maſſa ſeu pondus totius corporis $= M$, eius partis ſubmerſae volumen $= V$; reſiſtentiam vero hoc corpus motu directo in aqua progrediens tantam patiatur, quantam figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota pateretur; ex quo reſiſtentia, quam corpus, dum eius centrum grauitatis in G verſatur, patietur aequabitur ponderi voluminis aquae ffv, quod pondus ſe habebit ad pondus totius corporis M vt ffv ad V ita vt vis reſiſtentiae motum retardans futura ſit aequalis ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Sit nunc ſpatium $CG = s$, quod corpus ab initio motus

tus iam confecit, atque dum elementum Gg $= ds$ percurret tantum celeritatis decrementum vt fit $-dv = \frac{ffvds}{V}$; quae aequatio integrata dat $(\frac{k}{v} = \frac{ffs}{V}$ integratione ita instituta vt fiat $v = k$, posito $s = 0$, vti conditio quaestionis requirit. Erit ergo $\frac{k}{v} = e^{ffs:V}$ denotante e numerum, cuius logarithmus est $= 1$, hincque porro $v = ke^{-ffs:V}$, ex qua formula celeritas corporis in singulis punctis viae, quam describit cognoscitur. Denique cum ipsa celeritas sit $= e^{-ffs:2V}\sqrt{k}$ erit tempusculum, quo elementum Gg $= ds$ percurretur $= \frac{e^{ffs:2V}ds}{\sqrt{k}}$, indeque tempus totum, quod insumsit ad spatium CG $= s$ absoluendum, erit $= \frac{2V(e^{ffs:2V} - 1)}{ff\sqrt{k}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

763. Cum altitudo celeritati corporis in G debita sit $= ke^{-ffs:V}$, intelligitur corpus omnem motum nunquam esse amissurum: celeritas enim non euanescit, nisi ponatur $s = \infty$ hoc est corpus actu spatium infinitum absoluet antequam omnem perdat motum.

Coroll. 2.

764. Expressio celeritatis commode etiam in seriem potest transformari, per quam fiet $v = k - \frac{kffs}{V} + \frac{kf^4s^2}{2V^2} - \frac{kf^6s^3}{6V^3} + \frac{kf^8s^4}{24V^4} -$ etc. quae satis cito conuergit, nisi spatium s capiatur valde magnum.

Coroll. 3.

765. Deinde etiam perſpicitur decrementum celeritatis eo fore maius, dum corpus datum ſpatium s abſoluit, quo maior fuerit area ff, ad quam reſiſtentiam reduximus, et quo minor portio aquae fuerit ſubmerſa, hoc eſt quo leuius fuerit corpus.

Coroll. 4.

766. Si igitur plura corpora ſimilia eadem celeritate moueri incipiant, tenebit teſiſtentia ſeu area ff rationem ſubſesquiplicatam ponderum, partes ſubmerſae v vero ipſam rationem ponderum, vnde intelligitur corpora maiora minus retardari quam minora.

Coroll. 5.

767. Tempus etiam, quo corpus datum ſpatium $CG = s$ abſoluit, commode per ſeriem exprimitur, erit enim $= \frac{s}{\sqrt{k}} + \frac{f^2 s^2}{4V\sqrt{k}} + \frac{f^4 s^3}{24V^2\sqrt{k}} + \frac{f^6 s^4}{192V^3\sqrt{k}} +$ et. At ſi motu vniformi initiali progrederetur, nullam patiens reſiſtentiam, tum tempus per idem ſpatium s foret $= \frac{s}{\sqrt{k}}$; ex quo quanto maiori tempore propter reſiſtentiam opus ſit intelligitur.

Coroll. 6.

768. Si tempus, quo corpus datum ſpatium percurrit deſideretur in data temporis menſura, tum in expreſſione temporis $\frac{2V(e^{ffs:2V}-1)}{ff\sqrt{k}}$ quantitates k, s, ff et V in partibus milleſimis pedis rhenani exprimantur; quo facto expreſſio per 250 diuiſa dabit tempus in minutis ſecundis.

Co-

Coroll. 7.

769. Simili modo ſi celeritas ipſa deſideretur expreſſa per ſpatium, quod dato tempore percurritur ea celeritate vniformiter: ponatur ſpatium quod vno minuto ſecundo, abſoluitur eſſe n partium milleſimarum pedis rhenani, eritque $\frac{n}{250\sqrt{v}} = 1$; dato v pariter in particulis milleſimis pedis rhenani; vnde fiet $n = 250\sqrt{v}$.

Coroll. 8.

770. Sin autem celeritas detur per ſpatium n vno minuto ſecundo percurſum, atque n datum ſit in partibus milleſimus pedis rhenani, inuenietur altitudo celeritati illi debita $v = \frac{n^2}{62500}$, pariter in partibus milleſimis eiusdem pedis: ex quibus facile erit hos duos celeritates menſurandi modos inter ſe comparare, alterumque ex altero formare.

Scholion 1.

771. Quod corpora aquae innatantia nunquam omnem motum omittant, ſed perpetuo moueri pergant, id quidem experientiae non eſt conſentaneum, qua ſatis conſtat, motum, tandem penitus ceſſare. Verum hic notari oportet, aquam praeter eam reſiſtentiam, quae quadrato celeritatis eſt proportionalis aliam inſuper reſiſtentiam opponere, a celeritate non pendentem, ſed ipſis momentis temporum proportionalem, prout Neutonus loquitur, ſeu quae ſit conſtans, atque altitudinem celeritati debitam diminuat in ratione ipſius elementi ſpatii percurſi. Haec autem reſiſtentia aquae tam eſt exigua, vt niſi motus ſit lentiſſimus, ea prae altera reſiſtentia euaneſcat; hancque ob cauſam in ſolutione huius problematis

iſtam reſiſtentiam negleximus, cum inſtitutum noſtrum non ſit motus tardiſſimos ex profeſſo proſequi. Interim tamen iſta reſiſtentia calculum non reddit difficiliorem; ſit enim iſta reſiſtentia conſtans pro caſu oblato $= g$, ſeu ponderi g, aequiualens, prodibit loco aequationis $-dv = \frac{ffvds}{V}$ iſta $-dv = \frac{ffvds}{V} + \frac{gds}{M}$; quae integrata dat $v = (K + \frac{gV}{ffM}) e^{-ffs:V} - \frac{gV}{ffM}$. Ex hac igitur aequatione vtique intelligitur, corpus non vltra datum terminum eſſe progreſſurum, cum eius celeritas euaneſcat percurſo ſpatio s, cuius quantitas ex hac aequatione dabitur $e^{ffs:V} = \frac{kffM + gV}{gV}$ ſeu $s = \frac{V}{ff} (\frac{kffM + gV}{gV}$. Quin etiam ex iſta aequatione cognoſcetur ipſa haec reſiſtentia g, ex ſpatio percurſo, donec totus motus fuerit amiſſus, ſi enim hoc ſpatium per experientiam definitum ſit $= s$, erit $g = \frac{kffM}{V(e^{ffs:V} - 1)}$, quae vnico experimento definita, pro omnibus caſibus, quibus idem corpus curſu directo in aqua mouetur, valebit.

Scholion 2.

772. Initium fecimus huius capitis a motu ſeu curſu directo, atque inſuper rectilineo, motusque huius diminutionem a reſiſtentia ortam definiuimus. Ex iis autem circumſtantiis, quarum mentionem fecimus in ſolutione, ad curſum directum et rectilineum conſeruandum requiſitis, ſimul colligere licet quibus rebus iſte curſus turbetur. Primo ſcilicet motus rectilineus turbaretur, ſi directio media reſiſtentiae non in planum diametrale incideret, vel ſi vis horizontalis ex ea orta directioni motus non eſſet directe contraria; ex ſupra enim allatis ſatis patet ſi reſiſtentiae directio

directio non congruat cum directione motus, tum motum non ſolum retardari ſed etiam a ſemita rectilinea deflecti; quae quidem pertinent ad ſolum centri grauitatis motum progreſſiuum, quem hic imprimis conſideramus. Etiamſi autem motus non fieret in linea recta, tamen curſus manere poteſt directus, ſi ſcilicet perpetuo axis longitudinalis a prora ad puppem ductus maneat directioni motus parallelus; per curſum enim directum intelligimus eiusmodi nauium motum, cuius directio directe a puppi ad proram tendit, et in quo eadem nauis pars anterior reſiſtentiae aquae opponitur. Quando igitur eiusmodi vires adeſſent, quae nauem circa axem verticalem conuerterent, etiamſi illae motum progreſſiuum non afficerent, tamen curſum directum turbarent, et curſum obliquum producerent. Quare cum in caſu propoſito, nullae iſtius modi vires adſint, etiam motus non ſolum in linea recta fieri inuentus eſt, ſed etiam curſus manſit directus. Primum igitur conſtituimus curſus directos ſimulque rectilineos examini ſubiicere, tam in aqua quieſcenti quam fluuio, et id circo eiusmodi caſus proponere oportet, quibus tam curſus directus quam motus rectilineus conſeruetur; quibus caſibus euolutis facilius erit ad curſus obliquos motusque curuilineos examinandos progredi. Corpora autem ipſa aquae innatantia, prout ſunt vel libera ſeu ſibi relicta, vel non libera ſeu termino cuipiam veluti anchorae alligata primariam huius capitis diuiſionem ſuppeditabunt. Deinde vero ſubdiuiſiones ſumentur a potentiis quibus corpora ſollicitantur, de quibus ſi affuerint, primo enim in quaque tractatione vt hic fecimus nullas potentias

 ſolli-

ſollicitantes conſideramus, dispiciendum eſt, non ſolum quantae ſint et quamnam directionem teneant, ſed etiam quomodo pro varia corporum celeritate et directione immutentur. Si enim naues a vento propelluntur, vis venti fit eo minor quo celerius naues progrediuntur, quando quidem in eam plagam in quam ventus tendit, mouentur; in reliquis autem caſibus obliquitatis venti ratio eſt habenda. Deinde etiam velorum directio, a qua directio vis venti pendet, imprimis eſt contemplanda, quippe quae ſemel fixa eandem reſpectu nauis tenent poſitionem, vtcunque eius curſus immutetur. Remorum autem ratio aliter eſt comparata, cum eandem vim exerceant atque in eadem directione reſpectu nauis, quantumuis tam celeritas quam motus directio mutetur. Ad hanc igitur potentiarum diſtinctionem probe attendi oportebit, quando in earum effectus inquiremus; id quod etiam nunc non niſi generatim facere licet, cum ipſi effectus tam a vento quam remis oriundi nondum ſint penitus perſpecti; ſed in ſequenti demum libro accurate euoluentur. Quamobrem ſufficiet hoc argumentum ita generaliter pertractaſſe, vt eius vſus ad ſequentem librum ſatis pateat.

PROPOSITIO 75.

Problema.

Tab. XXXII. fig 1.

773. *Si corpus plano diametrali praeditum in fluuio ita ſit collocatum, vt axis corporis a prora ad puppem ductus in fluuii directionem incidat, definire motum quem fluuii vis corpori imprimet.*

So-

Solutio.

Repreſentetur corpus per ſectionem horizontalem A Æ B F per centrum grauitatis G factam, et ponatur corpus a fluuio iam propulſum eſſe in hunc ſitum, cum initio verſaretur eius centrum grauitatis in C, vbi corpus nullam adhuc habuit celeritatem. Manifeſtum igitur eſt ex conditionibus praeſcriptis corpus curſum directum atque rectilineum eſſe accepturum, cum nulla adſit vis, quae vel motum rectilineum deflectat, vel corpus circa axem verticalem conuertat, vt inde curſus obliquus oriri poſſet. Cum itaque corporis in C celeritas nulla fuiſſet, ponatur eius celeritas acquiſita cum in G peruenerit debita altitudini v ſpatium vero a centro grauitatis percurſum C G ſit $= S$. Porro fluuii celeritas debita ſit altitudini b. Dum ergo corpus verſatur in G vbi eius celeritas eſt $\sqrt{v}$ fluvius in corpus aget exceſſu ſuae celeritatis, qua eſt $\sqrt{b}$ ſupra celeritatem corporis $\sqrt{v}$, hoc eſt celeritate $\sqrt{b}-\sqrt{v}$ hacque celeritate eandem vim in corpus exeret, ac ſi corpus eadem celeritate in aqua quiescente ſecundum directionem A B moueretur. Ponatur autem figura plana $= ff$, quae hoc caſu eandem reſiſtentiam pateretur ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ex his ergo ſequitur fore vim corpus ſecundum directionem G L propellentem aequalem ponderi aquae, cuius volumen ſit $= (\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ff$. Poſitis igitur maſſa ſeu pondere corporis $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V erit vis corpus in G propellens $= \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffM}{V}$; ab hacque vi ita motus corporis accelerabitur, vt dum per ſpatii elementum $Gg = ds$ progreditur, ſit $dv = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffds}{V}$ ſeu $\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2} = \frac{ffds}{V}$, cuius inte-

integrale eſt $\frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} - 2\,l\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} = \frac{ffs}{V}$, integratione ita inſtituta vt fiat $v=0$ poſito $s=0$. Tempus autem quo corpus ſpatium $CG=s$ abſoluit eſt $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{V}{ff}\int\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2\sqrt{v}}$ $= \frac{2V\sqrt{v}}{ff\sqrt{(b-\sqrt{v})}\sqrt{b}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

774. Ex data igitur celeritate $\sqrt{v}$ multo facilius ſpatium s aſſignatur, quo percurſo corpus illam celeritatem acquiſiuit, quam viciſſim ex dato ſpatio s celeritas $\sqrt{v}$. Hancque obrem tempus non per ſpatium ſed per ipſam celeritatem determinare licuit.

Coroll. 2.

775. Intelligitur autem ex formulis inuentis corpus nunquam tantam celeritatem acquirere poſſe, quanta eſt celeritas fluuii; nam ſi ponatur $v=b$, fit ſpatium s itemque tempus quo fit $v=b$, infinitum.

Coroll. 3.

776. Sin autem ſemel fuerit $v=b$, id quod accidere poteſt, ſi corpori a vi externa tanta celeritas tribuatur, tum ob $dv=0$, corpus progrediendo neque augmentum celeritatis capiet, neque decrementum, ideoque tum motu vniformi promouebitur.

Coroll. 4.

777. Si logarithmus qui in aequatione, qua relatio inter ſpatium s et celeritatem $\sqrt{v}$ continetur in ſeriem conuertatur habebitur $\frac{ffs}{2V} = \frac{v}{2b} + \frac{2v\sqrt{v}}{3b\sqrt{b}} + \frac{3v^2}{4b^2} + \frac{4v^2\sqrt{v}}{5b^2\sqrt{b}} +$ etc. ex qua expreſſione patet celeritatem per datum ſpatium

tium s acquisitam eo fore maiorem quo maius fuerit circa ff.

Coroll. 5.

778. Quo igitur corpus quam celerrime a fluuio abripiatur, eam eius partem, quae impulsum aquae excipit, quae est corporis pars postica, ita oportet esse comparatam, vt ea si directe in aquam occurreret maximam pateretur resistentiam. Maxima igitur erit acceleratio si pars postica fuerit plana ad cursum fluuii normalis.

Coroll. 6.

779. Vti difficile est ad datum spatium percursum celeritatem corporis assignare, ita facilius post datum quodvis temporis interuallum celeritas corporis definiri potest. Posito enim tempore ab initio motus praeterlapso $= t$, erit $t = \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$, vnde vicissim fit $Vv = \frac{ffbt}{2V+fft\sqrt{b}}$.

Coroll. 7.

780. Si quantitates b, v, ff, et V exprimuntur in partibus millesimis pedis Rhenani, tempus t, quo data celeritas Vv acquiritur, innotescet in minutis secundis per hanc aequationem $t = \frac{V\sqrt{v}}{125ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}}$.

Coroll. 8.

781. Vicissim vero si tempus t detur in minutis secundis, atque quantitates b, ff et V partibus millesimis pedis Rhenani exprimantur, ista aequatio $Vv = \frac{125ffbt}{V+125fft\sqrt{b}}$ praebebit celeritati acquisitae altitudinem debitam v in particulis millesimis eiusdem pedis.

Scholion 1.

782. Poſuimus hic in initio C corpus nullam habuiſſe celeritatem, eique omnem motum quem acquirit, a motu aquae imprimi: ſed pari modo problema tractari poteſt, ſi corpori ab initio datus motus tribuatur, cuius directio cadat in eandem rectam CL, in qua tum directio fluminis, tum poſitio axis corporis AB ſunt ſitae. Si, autem quaeſtio hoc modo extendatur, caſus nonnulli inter ſe prorſus diuerſi a ſe inuicem probe ſunt diſcernendi; quorum primus eſt, ſi corpus dum in C aquae immittitur, iam habeat motum in directione fluuii CL ſed minorem quam ipſe habet fluuius; qui caſus ex ipſa ſolutione allata facile reſoluetur; nam quoniam celeritas fluvii maior eſt, corpus accelerabitur, atque ſi celeritas initialis debita ſit altitudini k, aequationis differentialis $\frac{dv}{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2} = \frac{ffds}{V}$ integralio fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} - \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{k}} - 2\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}}\right.$ atque tempus, quo ſpatium s abſoluit, ſeu celeritatem $\sqrt{v}$ acquirit, reperietur $= \frac{2V\sqrt{v}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{b}} - \frac{2V\sqrt{k}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{k})\sqrt{b}}$; quae omnia huc redeunt vt hic motus tanquam pars motus a quiete profecti conſiderari queat. Initium enim motus cenſendum eſt fuiſſe ſupra punctum C interuallo $s = \frac{2V\sqrt{k}}{ff(\sqrt{b}-\sqrt{k})} - \frac{2V}{ff}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{k}}\right.$. Ex hoc ſcilicet puncto corpus ex quiete motum in ſingulis ſpatii CL punctis easdem habebit celeritates, quas in ipſo caſu oblato, quo corpus data celeritate $\sqrt{k}$ ex puncto ipſo C egreditur. Deinde ſi celeritas corporis initialis in C directioni fluminis directe fuerit contraria, tum corpus primum contra curſum fluminis aſcendet, donec eius motus penitus ſit extinctus, indeque quaſi

quasi ex quiete a fluuio deorsum abripietur. Euolutio autem huius casus sequitur ex praecedente ponendo Vk negatiuum, si quidem in C celeritatem habeat Vk vnde fiet $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}} + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}-\sqrt{v}}$. Ex hac aequatione obtinebitur interuallum, per quod corpus vltra C contra fluuii cursum progredietur si ponatur $v = 0$; tum vero fit $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{b}+\sqrt{k}} - 2\,(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{k}}{\sqrt{b}} = \frac{-2k}{2(\sqrt{b}+\sqrt{k})^2} - \frac{2k\sqrt{k}}{3(\sqrt{b}+\sqrt{k})^3} - \frac{2k^2}{4(\sqrt{b}+\sqrt{k})^4}$ - etc. ex qua valor ipsius $-s$ desideratum spatium praebebit. Tertius denique casus ab his maxime discrepat, quo corpus initio in C motum habet velociorem secundum fluuii directionem sed maiorem. Tum enim motus corporis non solum in flumine retardabitur, sed etiam altera corporis superficies versus A in aqua constituta actionem aquae sentiet, posterior vero pars in B, quae hactenus sola vim ab aqua est passa, erit libera. Offendet igitur corpus hoc in casu resistentiam quae sit aequiualens resistentiae, quam superficies plana ff eadem celeritate in aquam impingens sentiret. Quare si celeritas initialis in C ponatur $= V\,k$ et in G $= V\,v$, erit resistentia $= \frac{Hff(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$, vnde fit $dv = -\frac{ffds(\sqrt{v}-\sqrt{b})^2}{V}$ atque integrando $\frac{ffs}{V} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k}-\sqrt{b}} + 2\,(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{b}}{\sqrt{v}-\sqrt{b}}$: ex qua intelligitur corpus demum infinito spatio percurso ipsam fluuii celeritatem adipisci.

Scholion 2.

783. Quanquam haec omnia ex calculo recte instituto consequantur, tamen si ad rem ipsam spectemus, correctione indigent. Missa enim ea circumstantia, cuius ante mentionem fecimus, qua aqua aliam exercet resisten-

tiam praeter eam quae quadratis celeritatum eſt proportionalis, in hoc motu ſuper fluuiis ad aerem quoque reſpici oportet, qui parti corporum ex aqua eminenti nonnullam reſiſtentiam opponit, quae quamuis fere octingenties minor ſit quam reſiſtentia aquae ceteris paribus, tamen euentus a ſola aqua oriundos nonnihil turbat. Ita reſiſtentia aeris in cauſa eſt, cur corpora a fluuio abrepta nunquam tam prope ad celeritatem fluuii accedant, quam calculus ſuperior indicat, neque etiam ob hanc ipſam cauſam corporis motus ſi fuerit aequalis motui fluminis, conſeruabitur, ſed retardabitur. Deinde ſi corpus in fluuio maiore deſcendat celeritate, quam ipſe fluuius habet, tum ob aeris reſiſtentiam non ſolum tandem ipſum fluuii celeritatem acquiret, ſed etiam minorem, quoad reſiſtentia aeris aequalis fiat impulſui aquae. Ad hunc effectum quodammodo aeſtimandum ponamus partem corporis in aere verſantem eandem ab aere pati reſiſtentiam, quam perpeteretur ſuperficies plana hh eadem celeritate contra aerem mota. Si ergo celeritas corporis, qua in aerem impingit debita ſit altitudini v, erit reſiſtentia aequalis ponderi molis aereae cuius volumen eſt $= hhv$, ſeu ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $= \frac{hhv}{800}$. Huius vis igitur ſi ratio habeatur in ſolutione problematis, prodibit $dv = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})^2 ffds}{V} - \frac{hhvds}{800V}$, ex qua intelligitur vltimam celeritatem quam corpus acquiret non fore $\sqrt{b}$ ſed minorem, fiet ſcilicet $f\sqrt{b} - f\sqrt{v} = \frac{h\sqrt{v}}{28}$ circiter, ſeu $\sqrt{v} = \frac{28 f\sqrt{b}}{28 f + h}$. Quamobrem ſi portio ſuperficiei corporis extra aquam eminentis ſit n vicibus maior, quam ea, quae ſub aqua ver-

ſatur,

ſatur, erit proxime $bb = nff$, indeque celeritas vltima $Vv = \frac{2g\sqrt{b}}{2g + \sqrt{n}}$. Hincque etiam immutationes in reliquis caſibus ab aere oriundae colligi poterunt. Sed in his omnibus aerem quietum poſuimus, aliter enim res ſe habebit, ſi aer vento agitetur, qui motus pariter non difficulter in calculum inducetur.

PROPOSITIO 76.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 1.

784. *Si corpus* AB *in aqua quieſcente non ſolum moueatur curſu directo in directione* BAL *ſed etiam ſecundum hanc directionem propellatur a vi quacunque conſtante, hoc eſt tali, quae corpus motum aeque acceleret ac quieſcens; definire motum huius corporis.*

Solutio.

Potentiam corpus ad motum ſollicitantem hic primum ponimus abſolutam ſeu talem, quae dato tempuſculo eandem producit accelerationem quacunque celeritate moveatur; eiusmodi ſcilicet potentiam exercent vires remorum, quibus ſiquidem remiges perpetuo eandem vim adhibeant, naues ſemper aequaliter propelli ſolent. Sit itaque potentia iſta corpus in directione AL propellens $= p$, denotante p pondus illi vi aequale: atque reſiſtentia, quam portio antica EAF in aqua patitur, tanta ſit quantam pateretur ſuperficies ff ſi eadem celeritate directe contra aquam impingeret. Ponamus nunc corporis centrum gravitatis iam ſpatium $CG = s$ confeciſſe atque in puncto C

 motum

motum inchoasse, in G vero celeritatem habere debitam altitudini v; vnde resistentia, quam in G sentiet erit $= ffv$; seu si corporis massa seu pondus dicatur M et volumen partis submersae $= V$, erit vis resistentiae $=$ ponderi $\frac{Mffv}{V}$. Ex his igitur dum corpus elementum $Gg = ds$ percurrit fiet $dv = \frac{pds}{M} - \frac{ffv\,ds}{V}$ seu $dv + \frac{ffv\,ds}{V} = \frac{pds}{M}$ quae ducta in $e^{ffs:V}$ fit integrabilis, atque aequatio integrata erit $e^{ffs:V}v = \frac{\int e^{ffs:V}pds}{M} = \frac{pV}{Mff}(e^{ffs:V} - 1)$, integratione ita instituta vt euanescat v posito $s = 0$. Quocirca habebitur ista aequatio $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ ex qua celeritas corporis in singulis spatii describendi CGL punctis innotescit. Tempus vero quo spatium $CG = s$ a centro grauitatis G percurritur innotescet ex integrali ipsius $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ quod reperitur $= \frac{2\sqrt{MV}}{f\sqrt{p}}\left((e^{ffs:2V} + \sqrt{(e^{ffs:V} - 1)}\right)$ Q. E. I.

Coroll. 1.

785. Corpus ergo continuo accelerabitur crescente enim s crescit v; atque spatio iam infinito emenso acquiret celeritatem, cuius altitudo debita erit $= \frac{pV}{Mff}$; seu celeritas maxima, quam acquirere potest erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$.

Coroll. 2.

786. Intelligitur autem ex formula inuenta $v = \frac{pV}{Mff}(1 - e^{-ffs:V})$ corpus mox tantam adipisci celeritatem, quae insensibiliter differat a celeritate vltima. Nam si fuerit spatium s modice magnum, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam abibit in tam exiguam fractionem, quae prae 1 euanescat dum-

dummodo enim fit $\frac{ffs}{V} = 10$ seu $s = \frac{10V}{ff}$, quantitas $e^{-ffs:V}$ iam minor fit quam $\frac{1}{10000}$.

Coroll. 3.

787. Neglecto ergo ipso motus initio corpus satis tuto concipi potest quasi motu vniformi progrederetur: atque celeritas, qua vniformiter promouebitur erit $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$, quae expressio si f et V exprimantur in particulis millesimis pedis Rhenani; tum $\frac{250\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ dabit spatium in eadem mensura, quod corpus vno minuto secundo absoluet.

Coroll. 4.

788. Celeritas ergo, qua nauis remis propulsa in aqua quiescente promouebitur, est in subduplicata ratione virium remorum: vnde si remigum numerus quadruplicetur, nauis duplo celerius progredietur.

Coroll. 5.

789. Hinc si duae naues inter se prorsus similes remis propellantur, atque maioris longitudo AB sit $= A$, minoris $= a$; maior vero propellatur vi $= P$, minor vero vi p, erunt celeritates, quibus incedent inter se vt $\frac{\sqrt{P}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{a}$. Quo igitur ambae naues aequali celeritate progrediantur, necesse est vt vires remorum teneant rationem duplicatam longitudinum.

Coroll. 6.

790. Deinde etiam intelligitur, quo minor sit resistentia nauis, eo maiorem fore celeritatem quam eadem vis

vis remorum generat. Cum enim ſit reſiſtentia abſoluta vt ff, erit celeritas producta in reciproca ſubduplicata ratione reſiſtentiae, id eſt ſi reſiſtentia quadruplo ſit minor, eadem vis remorum duplo maiorem celeritatem naui imprimet.

Coroll. 7.

791. Quoniam denique V ad M rationem tenet conſtantem; namque V ductum in grauitatem ſpecificam aquae, aequatur ipſi M; manifeſtum eſt celeritates nauium remis propulſarum eſſe in ratione compoſita ex directa ſubduplicata virium remorum et reciproca ſubduplicata reſiſtentiarum abſolutarum.

Scholion.

792. Quanquam hae determinationes tantum ad aquam quiescentem ſunt accommodatae, tamen facile ad motum nauium in fluuiis propulſarum a remis transferri poſſunt; ſiquidem motus fiat ſecundum ipſius fluuii directionem. Nam ſi celeritas fluuii ſit debita altitudini b ſeu ipſa celeritas $= \sqrt{b}$, tum ſi nauis in fluuio deſcendat, eius celeritas a vi remorum acquiſita augenda eſt celeritate fluuii, ita vt tale corpus, quale contemplati ſumus in fluuio deſcendendo acquirat velocitatem $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} + \sqrt{b}$. At ſi idem corpus contra fluuii curſum ſurſum propellatur, tum celeritatem acquiret $= \frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}} - \sqrt{b}$; ex qua expreſſione intelligitur, niſi $\frac{\sqrt{pV}}{f\sqrt{M}}$ maior ſit quam $\sqrt{b}$, corpus curſum fluminis ſuperare non poſſe, neque aſcendere. Quoniam autem haec ad vim remorum reſpiciunt, notandum eſt vires remorum vtrinque debere eſſe aequales et ſimiliter appli-

applicatas, quo vis ex iis coniunctim resultantis directio per medium nauis transeat, seu in rectam BA incidat; nisi enim hoc obseruetur, corpus seu nauis cursum directum tenere non poterit, animum namque hic abstrahimus ab actione gubernaculi, qua vtique huic incommodo subuenire posset.

PROPOSITIO 77.
Problema.

793. *Si superficies plana in situ verticali posita* e f *motu sibi parallelo moueatur vniformiter indirectum secundum directionem* CGL; *atque in eam impingat fluidum in directione* VG *data cum celeritate, determinare vim, quam fluidum allapsu suo in superficiem exercebit.* Tab. XXXIII. fig. 1

Solutio.

Sit celeritas qua superficies plana ef progreditur debita altitudini v, seu $= \sqrt{v}$, atque celeritas, qua fluidum mouetur $= \sqrt{c}$, anguli autem CGV, quem directio motus fluidi VG cum directione motus superficiei CGL constituit sinus ponatur $= \mu$ et cosinus $= \nu$. Anguli autem VGf, quem directio motus fluidi VG constituit cum planitie superficiei sinus sit $= m$ et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$; denique sit $gg =$ ipsi superficiei, cuius centrum grauitatis sit in puncto G. Iam si superficies quiesceret, ex ante demonstratis foret vis, quam fluidum in superficiem exereret $= m^2 g^2 c$, seu aequaretur ponderi molis ex eadem materia fluida constantis, cuius volumen est $= m^2 g^2 c$. At cum superficies non quiescat sed celeritate $\sqrt{v}$ progrediatur in directione GL concipiatur to-

 tum

tum ſyſtema ex fluido et ſuperficie conſtans retro in directione GC celeritate $\sqrt{v}$ promoueri, quo fiet vt ſuperficies ef in quietem redigatur; vis autem fluidi in ſuperficiem exerta vtroque caſu erit eadem. Per compoſitionem motus autem innoteſcet, tam celeritas fluidi reſultans quam directio: Cum enim nunc fluidum duplici feratur motu, altero ſecundum directionem GN celeritate $\sqrt{c}$ altero vero in directione GM celeritate $\sqrt{v}$. Si capiatur $GN = \sqrt{c}$ et $GM = \sqrt{v}$: atque formetur parallelogramum GMKN, diagonalis GK tam celeritatem fluidi reſultantem, quam eius directionem ſuggeret, ita vt fluidum cenſendum ſit celeritate GK in directione UG in ſuperficiem ef quiescentem impingere. Demiſſo autem ex G in NK productam perpendiculo GH, erit ob anguli GNH ſinum $= \mu$ et coſinum $= v$, perpendiculum GH $= \mu\sqrt{c}$ et $NH = v\sqrt{c}$, vnde fiet $KH = v\sqrt{c} - \sqrt{v}$ atque $GK = \sqrt{(c - 2v\sqrt{cv} + v)}$. Ex his reperietur anguli NGK ſeu UGV ſinus $= \frac{\mu\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2v\sqrt{cv}+v)}}$ et coſinus $= \frac{\sqrt{c}-v\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2v\sqrt{cv}+v)}}$ atque hinc prodit anguli UGf ſinus $= \frac{m\sqrt{c}-(mv-n\mu)\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2v\sqrt{cv}+v)}}$ qui ergo eſt ſinus anguli incidentiae ſub quo fluidum impinget in ſuperficiem, quare cum fluidi celeritas ſit $= \sqrt{(c - 2v\sqrt{cv} + v)}$, prodibit vis, quam fluidum in directione vera VG celeritate $\sqrt{c}$ motum, in ſuperficiem ef motam celeritate $\sqrt{v}$ in directione GL, $= (m\sqrt{c} - (mv - n\mu)\sqrt{v})^2 g^2$, huiusque vis directio tranſibit per ſuperficiei centrum grauitatis G atque ad ipſam ſuperficiem erit normalis. Q.E.I.

Coroll. 1.

794. Si anguli CGf ſinus ponatur $= q$, cum ſit $q = mv - n\mu$, erit vis fluidi, quam in ſuperficiem exerit

=

$=(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2 gg$, seu tantum fluidi volumen pondere adaequabit.

Coroll. 2.

795. Quoniam anguli UGf sinus inuentus est $= \frac{m\sqrt{c}-q\sqrt{v}}{\sqrt{(c-2v\nu\sqrt{c}\sqrt{v}+v)}}$, manifestum est esse debere $m\sqrt{c} > q\sqrt{v}$, siquidem superficies plana versus plagam GK debeat vrgeri. Nam si esset $m\sqrt{c} < q\sqrt{v}$ tum superficies adeo vrgeretur versus plagam UV.

Coroll. 3.

796. Si superficies plana ef normaliter ad cursum fluidi VG constituatur, ita vt sit $m=1$ et $n=0$, erit vis quam superficies patietur $=(\sqrt{c}-\nu\sqrt{v})^2 gg$: quae vis ideo eo minor erit, quo maior fuerit anguli VGC cosinus ν.

Coroll. 4.

797. Manente autem positione superficiei ef eadem respectu directionis motus ipsius GL, vis fluidi eo maior erit quo maior fuerit sinus m. Quare maximam patietur vim superficies, si angulus VGf fuerit rectus.

Coroll. 5.

798. Sin autem superficies ef iuxta motus sui directionem GL collocata fuerit, erit angulus CGf euanescens et consequenter $q=0$; hoc igitur casu superficies eadem patietur vim ac si quiesceret.

Coroll. 6.

799. Si fluidum veniret ex regione vG, ita vt directio vG tantum inclinet ad Ge, quantum directio VG

 inclinat

inclinat ad Gf, manebit anguli vGf idem sinus $= m$; ideoque ob angulum CGf inuariatum, cuius sinus est q, erit vis quam superficies sufferet eadem, quae in altero casu scilicet $= (m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg$.

Coroll. 7.

800. Ponamus angulum VGC manere inuariatum; definiri poterit angulus VGf, seu positio superficiei ef, vt maximam vim a fluido sufferat. Reperietur autem anguli VGf tangens $= \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{c} - \nu\sqrt{v}}{\mu\sqrt{v}}$, atque vis erit $= (c - 2\nu\sqrt{cv} + v)g^2$.

Scholion

801. Haec propositio in sequentibus maxime nobis erit necessaria, vbi tum vim venti in vela mota tum vim fluuii in nauem promotam sumus inuestigaturi. Facile autem patet nisi venti celeritas sit maxima seu prope infinita, ipsum velorum motum negligi omnino non posse; si enim vela in eandem plagam progrediantur in quam ventus tendit, perspicuum est vim venti in vela eo fore minorem, quo celerius vela promouentur, atque adeo euanescere, si vela eandem, quam ipse ventus, habeant celeritatem. Quamobrem hac propositione praemissa licebit nobis sequentia problemata aggredi in quibus inquiremus, quomodo naues a vento propellantur, tam cursu directo, quam vtcunque obliquo.

PROPOSITIO 78.

Problema.

Tab. XXXII. fig. 2.

802. *Si corpus seu nauigium plano diametrali AB praeditum a vento ita sollicitetur, vt cursu directo secundum dire-*

directionem GL in aqua quiescente promoueatur, determinare motum huius nauigii, et celeritatem maximam, quam recipere poterit.

Solutio.

Quoniam nauis cursu directo in directione BAL moueri ponitur, in quam simul directio resistentiae incidit, oportet vt media directio venti in eandem directionem incidat. Quare cum vis venti semper normalis sit in planum velorum, atque eius media directio per centrum grauitatis velorum transeat, requiritur vt planum velorum normale sit ad planum diametrale AB, atque vt velorum centrum grauitatis in idem hoc planum incidat. Repraesentet itaque EF velorum planitiem, cuius area sit $= gg$, sitque G centrum grauitatis velorum in axe AB positum; hocque modo fiet vt media directio venti in rectam GL incidat, eaque tam cursus directus, quam motus progressiuus in recta GL conseruetur. Impingat nunc ventus in vela in directione quacunque obliqua VG, sitque celeritas venti debita altitudini c, atque anguli VGC, quem directio venti cum directione motus constituit, sinus sit $= \mu$ et cosinus $= V$; eritque anguli VGF, quem directio venti VG cum planitie velorum constituit sinus $= v$, qui ante positus erat m, et cosinus, qui ante erat n, hoc casu erit $= -\mu$, quoniam angulus VGF est obtusus. Ponamus porro nauem in puncto C motum incepisse, atque iam absoluisse spatium $CG = x$, hicque habere celeritatem debitam altitudini v. His positis ex praecedente propositione erit vis venti, qua nauem vrgebit in directione GL,

 =

$=(m\sqrt{c}-(m\nu-n\mu)\sqrt{v})^2g^2=(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2$, tantum ſcilicet aeris volumen pondus habebit vi iſti propellenti aequalem; ſiue cum aeris grauitas ſpecifica ſe habeat proxime ad aquam vt 1 ad 800 ſeu 1 ad 784, quam poſteriorem rationem vſurpabimus quia 784 eſt numerus quadratus, nobiſque radicis extractione eſt opus, pondus aquae vi illi aequale volumen habebit $=\frac{(v\sqrt{c}-\sqrt{v})^2gg}{784}$. Exprimat nunc ſuperficies plana ff reſiſtentiam, quam nauis in curſu directo ab aqua patitur, ſeu ſuperficies plana ff eandem patiatur quam nauis, ſi directe contra aquam eadem celeritate impingeret. Hinc igitur erit vis reſiſtentiae aequalis ponderi molis aquae, cuius volumen eſt $=ffv$, quoniam aquam quieſcentem aſſumimus. Ex his ergo ſi nauis maſſa ſeu pondus dicatur $=M$ et volumen partis ſubmerſae $=V$ erit vis nauem propellens in directione GL $=\frac{M(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2gg}{784V}$ vis autem repellens $=\frac{Mffv}{V}$; ex quibus conficitur acceleratio, dum nauis per elementum $Gg=dx$ progreditur, $dv=\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2dx}{784V}-\frac{ffvdx}{V}$. Tamdiu igitur nauis accelerabitur, quam diu fuerit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2}{784}$ maius quam ffv; at quamprimum tantam acquiſiverit celeritatem $\sqrt{v}$ vt ſit $\frac{(\nu\sqrt{c}-\sqrt{v})^2g^2}{784}=ffv$, quod quidem demum poſt ſpatium infinitum confectum eueniet, ſed mox tam prope iſtam celeritatem aſſequetur vt diſcrimen ſit inſenſibile. Hancobrem excepto motus initio nauis motu vniformi in directione GL curſuque directo promouebitur celeritate altitudini v debita, cuius valor ex ſuperiore aequatione reperitur $\sqrt{v}=\frac{\nu g\sqrt{c}}{28f+g}$ ita vt ipſa nauis celeritas ſe habitura ſit ad celeritatem venti vt νg ad $28f+g$. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

803. Cum celeritas, quam nauis hoc vento propulsa acquirit sit $= \frac{vg\sqrt{c}}{28f+g}$, intelligitur celeritatem nauis ceteris paribus rationem tenere simplicem celeritatum venti, ita vt in qua ratione venti celeritas augeatur, in eadem nauis celeritas crescat.

Coroll. 2.

804. Quod autem ad superficiem velorum gg attinet, perspicitur celeritatem corporis quidem crescere, si vela multiplicentur, sed nullam tenere rarionem fixam. Si enim vela in infinitum augeantur, celeritas nauis tamen vltra datum terminum non augebitur, acquiret scilicet facto $gg = \infty$ celeritatem $= v\sqrt{c}$.

Coroll. 3.

805. Quando ergo vela iam eousque fuerint aucta vt $28f$ respectu ipsius g fere euanescat, tum quantumuis amplius vela multiplicentur, naui tamen maior celeritas non imprimetur. Ex quo colligi licet inutile esse vela vltra datum terminum multiplicare; qui terminus ex resistentia in praxi facile determinabitur.

Coroll. 4.

806. Ex his etiam concluditur lucrum non adeo considerabile obtineri, etiamsi resistentia vehementer diminuatur. Si enim vela tanta accipiantur vt g multum excedat $28f$, tum parum intererit, si resistentia etiam penitus tolleretur. Attamen quo minor est resistentia, eo paucioribus velis erit opus.

Co-

Coroll. 5.

807. Ceterum ſponte patet manente nauis diſpoſitione eadem, celeritatem venti eo fore maiorem quo minor fuerit angulus VCG: vnde ventus directe ſecundum CG ſeu a puppi vrgens naui maximam imprimet velocitatem.

Scholion. 1.

808. Ex his ſatis ſuperque intelligitur quantum interſit diſcrimen inter naues quae vento, easque quae remis propelluntur. In iis enim quae remis promouentur plurimum intereſt vt reſiſtentia quantum fieri poteſt diminuatur, cum celeritates impreſſae teneant rationem reciprocam ſubduplicatam reſiſtentiarum: contra vero in iis navibus quae a vi venti propelluntur diminutio reſiſtentiae non tantum lucrum affert; ex quo in conſtructione nauium maximum oritur discrimen, prouti vel velis vel remis deſtinantur. Haec autem ipſa differentia in praxi, ſi naves vſu receptas intueamur, apprime obſeruata deprehendetur. Triremes enim ſeu eiusmodi naues, quae remis mouentur, partem anticam habent acutiſſimam, vnde reſiſtentia oritur perquam exigua. Alteram vero nauium ſpeciem vento deſtinatam videmus parte antica ſatis obtuſa praeditam, quae parum ſit idonea ad reſiſtentiam diminuendam. Ex his autem ſponte ſequitur, quommodo eiusmodi naues, quae tam remis quam vento coniunctim promoueri ſolent, comparatas eſſe oporteat, vt ſint maxime aptae; ſcilicet perſpicuum eſt medium quoddam eſſe eligendum inter vtramque ſpeciem tractatam. At hoc discrimen tantum etiamnum eſt petitum ex curſu directo, maius

maius deprehendatur cum curſus obliquos examini ſubiecerimus, ad quos naues velis inſtructae praecipue debent adaptari, cum contra in nauibus remis propellendis ad curſum obliquum omnino non opus ſit reſpicere. Ceterum ex modo ſolutionis facile erit calculum abſoluere, ſi praeter ventum etiam remi vrgeant, atque nauis coniunctim a remis et velis propellatur. Simili modo quilibet non difficulter calculum inſtituet, ſi motus non fiat in aqua quieſcente, ſed in fluuio, dummodo directiones fluuii et motus corporis congruant; atque curſus ſit directus; quamobrem huiusmodi inueſtigationibus diutius non adhaerebimus.

Scholion 2.

809. Quod hic ſuperficiem velorum perfecte planam poſuimus, id ſolutionem datam minime turbat etiamſi vela a vento in figuram concauam extendantur: in ſequenti enim libro, quo velorum doctrina imprimis excutietur, demonſtrabitur ſemper velum planum aſſignari poſſe eandem vim excipiens, ita vt quae hic de velis planis afferuntur, aeque valeant pro velis, quemadmodum in praxi vſurpantur. Deinde etiam ſolutio ab experientia in hoc diſſentire videtur quod ventum maxime lucroſum ſtatuat eum, qui directe a puppi venit, cum tamen obſeruatione conſtet naues felicius a vento non nimis obliquo propelli. Ratio autem huius diſcrepantiae ſita eſt inconſueta collocatione velorum qua vela tum in puppi tum in prora tum etiam in medio nauis expandi ſolent: vnde facile colligitur, ſi ventus recta a puppi ad proram tendat, tum poſteriora vela anterioribus ventum adimere, atque impedire, quominus

 minus

minus ventus in vela anteriora impingere queat. Cum autem hoc non eueniat, ſi directio venti eſt obliqua, mirum non eſt ventum obliquum maiorem celeritatem producere ſolere quam directum. Sed haec tantum ſunt intelligenda, ſi nauis pluribus malis ſit inſtructa, hoc enim caſu tantum illud incommodum locum habet, at ſi vnicus adſit malus, ventuſque adeo libere in omnia vela incurrere poſſit, tum memoratus diſſenſus theoriae cum praxi non obſeruatur, ſed potius nauis eo celerius progredi deprehenditur, quo minus directio venti a directione curſus nauis aberrat. Eiusmodi autem diſſenſus apparentes ſaepius occurrunt praecipue in hac doctrina de motu nauium, ſed ſemper ſi omnes circumſtantiae probe perpendentur facile diluentur.

Scholion 3.

810. Hi igitur fere ſunt caſus, quibus naues curſu directo motuque rectilineo in aqua tam quiescente quam fluente incedere poſſunt, ad quem curſum requiritur, vt tum ipſius motus directio, tum media directio reſiſtentiae tum directio vis ſollicitantis tum etiam fluuii directio inter ſe congruant; atque in axem ſeu rectam a puppi ad proram ductam incidant. Quarum conditionum vnica ſi defecerit, vel curſus directus vel motus rectilineus turbabitur, euenietque vt vel motus directio ab axe nauis ſeu diametro longitudinali a puppi ad proram porrecta declinet, vel etiam centrum grauitatis cogatur in linea curua incedere, quae omnia probe inter ſe diſcernere, et quodque ex ſuis cauſis deriuare omni attentione erit opus. Interim ex traditis ſatis liquet ſi vis ſollicitans directionem habeat ſecundum nauis longitudi-

tudinem, tum etiamſi curſus vehementer eſſet obliquus, tamen breui in curſum directum mutatum iri. Quando enim vis ſollicitans perpetuo in eandem plagam tendit, tum motus ſi quis affuerit obliquus mox tam deſtruetur, vt eius directio in directionem vis ſollicitantis incidat. Atque hinc fit, vt naues quae remis propulſantur, perpetuo ſecundum ſuam longitudinem progrediantur, cum directio vis remorum ſemper eo tendat, quamuis ſubinde ope gubernaculi directio curſus immutetur. Tum enim quaſi ad momentum tantum durat motus curuilineus, ſtatimque in directum tranſmutatur, cuius rei ratio potiſſimum in reſiſtentia laterali eſt ſita, quae in his nauibus vehementer eſt magna, motumque obliquum ſtatim deſtruit. Atque ob hanc rationem curſus directus proprius eſt illi nauium ſpeciei, quae remis propelluntur; nam quoniam vis remorum in quamuis plagam aeque exerceri poteſt, atque motus ſecundum longitudinem ob minimam reſiſtentiam eſt facillimus, abſurdum foret huiusmodi naues ad motum obliquum inſtruere. Longe aliter autem comparata eſt ratio nauium, quae vento ad motum cientur, cum directionem venti non ad arbitrium formare liceat, ſed eo vento, quem fortuna ſuggerit, ad iter inſtitutum conficiendum vti oporteat. Quoties igitur euenit vt curſus intentus a directione venti tantopere diſcrepet, vt curſus directus omnino inſtitui nequeat, tum ad curſum obliquum eſt confugiendum, qui eo felicius vſurpabitur, quo propius verſus regionem vnde ventus flat nauigari poterit. In his igitur nauibus, quae vento propelluntur, praecipue curſus obliquus attendi debet, indeque potiſſimum regulae pro con-

ſtructione et velificatione nauium ſunt petendae. Quamobrem iſtum curſum obliquum, quo nauis non ſecundum longitudinem ſuam progreditur, imprimis in iis nauibus examini ſubiiciemus, quae non remis ſed ſolo vento ad motum cientur.

PROPOSITIO 79.
Problema.

Tab. XXXII. fig. 3.

811. *Si corpus ſeu nauis* AEBF *in aqua quieſcente acceperit curſum obliquum ſecundum directionem* GL *data cum celeritate, determinare tam ipſam viam, quam eius centrum grauitatis* G *deſcribet, quam vbique curſus obliquitatem, ſeu poſitionem axis longitudinalis* AB.

Solutio.

Sit AGL angulus declinationis curſus, quem directio motus GL cum poſitione axis longitudinalis BA ſeu ſpinae conſtituit, huiuſque anguli ſinus ponatur s; coſinus vero $= r$ celeritas autem corpori impreſſa ſecundum directionem GL debita ſit altitudini v. Deinde ſit RM media directio reſiſtentiae, quam corpus hoc motu obliquo ab aqua patietur, quae cum directione ſpinae ſeu axis nauis AB angulum MRB conſtituat, cuius ſinus ſit $= \sigma$, coſinus vero $= \varrho$; atque reſiſtentia quam nauis hac obliquitate in aqua mota patitur, tanta ſit, quantam pateretur ſuperficies plana uu eadem celeritate directe contra aquam in directione MR mota; vnde vis reſiſtentiae, qua corpus ſecundum directionem RM vrgebitur, aequalis erit ponderi molis aqueae, cuius volumen eſt $= uuv$ pendebunt autem quantitates σ, ϱ et u ab angulo obliquitatis AG

AGL eiusve ſinu s atque ſtructura totius corporis. Quare ſi maſſa ſeu pondus totius corporis ponatur $=M$ atque volumen partis aquae ſubmerſae $=V$ erit vis reſiſtentiae in directione RM vrgentis $=\frac{Muuv}{V}$; quae vis duplicem exeret effectum quorum alter conſiſtit in motu progreſſiuo centri grauitatis G alterando, alter vero in corpore circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum convertendo. Ad priorem autem effectum inueſtigandum oportet vim RM tanquam in ipſo centro grauitatis G in directione ſibi parallela GH applicatam concipere. Anguli igitur HGK, quem directio reſiſtentiae GH cum directione motus GK conſtituit, ſinus erit $=r\sigma - s\varrho$, atque coſinus $=s\sigma + r\varrho$. Hinc vis reſiſtentiae quae eſt $=\frac{Muuv}{V}$ reſolvetur in binas laterales GK, KH, quarum alterius GK directio in ipſam motus directionem GL incidit, altera KH vero ad hanc erit normalis: ex quibus vis tangentialis GK erit $=s\sigma + r\varrho \frac{Muuv}{V}$, et vis normalis KH $= \frac{(r\sigma - s\rho)Muuv}{V}$. Vis igitur tangentialis retardabit corporis motum, efficietque, vt dum corpus elementum ſpatii $Gg = dx$ percurrit, futurum ſit $dv = -\frac{s\sigma + r\rho uuvdx}{V}$. Vis normalis autem corpus a ſemita rectilinea deflectet cogetque arcum circularem concauum verſus regionem M deſcribere, cuius radius erit $=\frac{2V}{(r\sigma - s\rho)u^2}$. Quod denique ad alterum effectum attinet, quo corpus a vi reſiſtentiae conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, patet primo conuerſionem fieri in regionem AF, ita vt per eam declinatio AGL magis augeatur, ſi quidem centrum reſiſtentiae R intra centrum grauitatis G et proram

A cadat. Dicto autem interuallo $GR = z$, fiet momentum vis refiftentiae ad hanc conuerfionem producendam $= \frac{\sigma Muuvz}{V}$, quod momentum diuifum per ipfius corporis momentum inertiae refpectu eiufdem axis verticalis per centrum grauitatis G tranfeuntis, dabit vim gyratoriam cui motus angularis momentaneus eft proportionalis. Sin autem corpus motum angularem iam habuerit, tum ex vi gyratoria eius incrementum cognofcetur. Q. E. I.

Coroll. 1.

812. Retardatio ergo motus eo erit maior, quo minor fuerit angulus HGK, hoc eft quo minor fuerit differentia inter angulos GRM et AGL. Ex quo fequitur quo magis angulus GRM excedat angulum AGL eo fore diminutionem motus minorem.

Coroll. 2.

813. Quia porro plerumque refiftentia eo fit maior, quo magis curfus obliquus a directo differt, feu quo maior fuerit angulus AGL, dummodo rectum non excedat, valor ipfius $\underline{uu}$ eo maior erit, quo maior fuerit angulus AGL, indeque eo maior motus retardatio orietur.

Coroll. 3.

814. Maxima igitur accedet motus retardatio, fi angulus AGL fiat rectus, tum enim non folum valor ipfius $\underline{uu}$ omnium fiet maximus, fiquidem refiftentia lateralis multum fuperet refiftentiam prorae. Sed etiam tum directio refiftentiae RM in motus directionem incidet, quo fit vt $s\sigma + r\varrho$ maximum valorem obtineat, fiatque $= 1$.

Coroll.

Coroll. 4.

815. Cum radius curuedinis viae, in qua centrum grauitatis G incedet, sit $=\frac{2V}{(r\sigma-s\rho)u^2}$, corpus a directione sua impressa GL deflectet; atque dum elementum spatii $Gg=dx$ percurrit, deflectet angulo $=\frac{(r\sigma-s\rho)u^2dx}{2V}$.

Coroll. 5.

816. Deflexio ergo a cursu rectilineo non pendet a celeritate corporis, sed tantum a cursus obliquitate. A cursus enim obliquitate pendet tum valor ipsius uu, tum etiam $r\sigma-s\rho$, seu sinus differentiae angulorum MRG et AGL.

Coroll. 6.

817. Si igitur angulus MRG aequalis fiat angulo AGL, tum deflectio a cursu rectilineo omnino erit nulla, corpusque in linea recta progredi perget. At si angulus MRG maior fuerit angulo AGL; tum deflectet versus A, atque viam curuilineam Gl describet, inter GA et GL sitam. Sin autem fuerit angulus AGL maior angulo MRG, tum in partem oppositam deflectet.

Coroll. 7.

818. Si centrum resistentiae R incidat in ipsum grauitatis centrum G, tum vis gyratoria euanescit, hoc igitur casu positio axis AB perpetuo manebit sibi parallela. Vnde si angulus MRG seu HGB aequalis sit angulo KGB, tum corpus non solum perget moueri in recta GL, sed etiam eadem cursus obliquitas conseruabitur.

Coro-

Coroll. 8.

819. Incidente autem R in G, seu quod perinde est, dummodo puncta G et R in eandem rectam verticalem cadant, si angulus MRG maior fuerit angulo AGL, tum cursus directio Ggl accedet ad positionem axis AB tandemque abibit motus in cursum directum, eousque conseruandum, quoad motus per resistentiam omnis extinguatur. Sin autem angulus MRG minor sit angulo AGL tum cursus continuo magis deflectet a directo, ita vt tandem eius directio fiat normalis ad AB.

Coroll. 9.

820. Si autem centrum resistentiae R non in G sed versus proram A cadat, tum corpus inter mouendum conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum, atque axis BGA gyrabitur secundum plagam AF; quo fiet vt obliquitas cursus seu angulus AGL perpetuo crescat.

Coroll. 10.

821. Sin autem centrum resistentiae R vltra G versus puppim B cadat, tum conuersio fiet in regionem oppositam; vnde cursus obliquitas mox tolletur, atque axis nauis AB conuertetur in ipsam motus directionem GL; quod si euenerit cursus directus conseruabitur.

Scholion 1.

822. Ex his etiam intelligitur, si nauis AB, quae ante cursu directo promouebatur, a vi externa ita conuertatur, vt eius spina AB angulum obliquum AGL cum mo-

motus directione constituat, cuiusmodi mutationes inde sint oriturae. Praecipue enim respiciendum erit ad centrum resistentiae R, angulo obliquitatis cursus praesenti A G L respondens: quod si vltra centrum grauitatis G versus proram fuerit collocatum, tum nauis sese in pristinum situm restituet, cursumque directum recuperabit. Contra vero si centrum resistentiae R versus proram cadat, tum nauis non solum in cursum directum se non recipiet, sed etiam obliquitas cursus augebitur donec axis latitudinalis E F in cursus directionem incidat, quod si euenerit hoc situ in directum progredietur. Quocirca si centrum resistentiae R in puppim cadat, cursus directus aliquam censendus est habere firmitatem, cum nauis si ex eo depellatur, eo sponte se restituat; e contrario autem si centrum resistentiae R versus proram cadat, tum cursus directus quasi erit infirmus, eo quod si nauis quam minime de cursu directo declinetur, obliquitas continuo maior euadit. Quamobrem cursus directus difficulter conseruabitur, nisi habeat firmitatem, hoc est nisi centrum resistentiae R versus puppim cadat; minima enim vis sufficeret ad cursum directum penitus destruendum. Interim tamen etiamsi centrum resistentiae R in prora situm sit, tamen cursus directus ope gubernaculi B b conseruari poterit; eo maiore autem opus erit vi ad restitutionem in cursum directum, quo propius punctum R ad proram A ceciderit, simulque quo maior angulus G R M extiterit. Cursus autem obliquus sub angulo A G L in directum conseruari omnino nequit nisi centrum resistentiae R in G cadat, atque angulus H G K euanescat. Nam si R cadat in proram ne-

 qui

quidem ope gubernaculi motus rectilineus ſub eadem obliquitate conſeruari poteſt: quamuis enim gubernaculum in ſitum Bb deflexum motum conuerſionis nauis circa axem verticalem impedire queat, tamen per ipſam gubernaculi vim motus magis a via rectilinea GL declinabitur; Si quidem angulus MRG maior fuerit angulo AGL, prout id quidem in nauibus accidere debet. Quando autem centrum reſiſtentiae R in puppim cadit, tum fieri poteſt vt ope gubernaculi eadem obliquitas curſus, motusque rectilineus conſeruetur; id quod eueniet, ſi vis gubernaculi non ſolum motum gyratorium impediat, ſed etiam ſimul vim normalem deſtruat. Ex his omnibus perſpicuum eſt ad motum rectilineum ſub directione obliqua conſeruandum opus eſſe viribus externis inſigni cautione applicandis, qua quidem de re mox videbimus. Quo autem quovis caſu aeſtimari liceat, quomodo valores σ, ϱ et $\underline{u}\,\underline{u}$ vna cum interuallo $GR = z$ a data curſus obliquitate pendeant, exempla quaedam afferamus, in quibus iſti valores exhiberi poterunt.

Exemplum 1.

823. Sit primo figura AEBF compoſita ex duobus ſegmentis circularibus aequalibus ad communem chordam AB diſpoſitis, ſeu ſint nauis omnes ſectiones horizontales huic figurae aequales; et ponatur radius circuli cuius arcus AEB et AFB ſunt portiones $= c$; atque cum centrum grauitatis G in medio chordae AB erit ſitum, ſit $AG = BG = a$; $EG = FG = b$, ita vt ſit $2bc = a^2 + b^2$; et ponatur breuitatis gratia $c - b$ ſeu $\sqrt{(c^2 - a^2)} = d$. Ex his cum propoſ. 58 comparatis prodibit interuallum $GR = z$

=

$= \frac{ra^3d}{c^3-rd^3}$ atque anguli GRM tangens $= \frac{\sigma}{\rho} = \frac{2sc^3-2rsd^3}{2rc^3-3rrc^2d+(rr-ss)d^3}$: tandemque vis resistentiae $= \frac{2v}{3cc} \surd\, (4c^6-12r^3c^5d+9r^4c^4d^2+4r(r^2-3ss)c^3d^3-6rr(r^2-s^2)c^2d^4+d^6)$ quae vis resistentiae, si cursus sit directus, prodit $= \frac{2(c-d)^2(2c+d)v}{3cc}$. Si ergo sit ff superficies plana eandem patiens resistentiam, quam patitur corpus in cursu directo erit $\frac{uu}{ff} = \frac{\surd(4c^6-12r^3c^5d+9r^4c^4d^2+4r(r^2-3s^2)c^3d^3-6rr(r^2-s^2)c^2d^4+d^6)}{(c-d)^2(2c+d)}$. Si fuerit obliquitas valde parua vt s prae r euanescat fiet $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{2s(c^3-d^3)}{2c^3-3c^2d+d^3} = \frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(2c+d)}$, vnde erit $\rho = 1$ et $\sigma = \frac{2s(c^2+cd+d^2)}{(c-d)(u+d)} = \frac{a^2s}{b^2}$; et $z = \frac{a^3d}{c^3-d^3} = \frac{ab^2(a^2-b^2)}{a^4+3b^4}$. Ex quibus ponendo angulo AGL infinite paruo prodibit $s\sigma+r\rho = 1$ et $r\sigma-s\rho = \sigma-s = \frac{s(a^2-b^2)}{b^2}$ atque $u^2 = f^2$. Quibus substitutis habebitur $dv = -ffv\,dx$, et radius curuedinis curuae descriptae $= \frac{2bbV}{(a^2-b^2)ffs}$. atque momentum vis corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum conuertens $= \frac{a^3(a^2-b^2)Mffsv}{(a^4+3b^4)V}$.

Coroll. 1.

824. Vis igitur gyratoria seu obliquitatem cursus adaugens eo erit maior, quo magis longitudo nauis excedit latitudinem. Atque simul eo maior erit curuatura viae, in qua corporis centrum grauitatis incedet.

Coroll. 2.

825. Patet etiam quo magis longitudo AB superet latitudinem EF, eo magis fore excessum anguli GRM supra angulum AGL. Namque angulus GRM se habet ad angulum AGL in duplicata ratione longitudinis ad latitudinem nauis.

 Co-

Coroll. 3.

826. Si ergo latitudo EF aequalis fiat longitudini AB, seu $b=a$, quo casu figura abibit in integrum circulum, tum erit $c=a$ et $d=0$; vnde centrum resistentiae in G cadet atque fiet $\frac{\sigma}{\rho}=\frac{s}{r}$, quamobrem cursus inceptus sine vlla mutatione continuabitur; id quod etiam eo patet, quod in circulo non detur cursus obliquitas.

Exemplum 2.

827. Sit figura nauis, praeterquam quod habeat planum diametrale AB id quod semper ponimus, ita comparata vt centrum resistentiae R perpetuo cadat in rectam verticalem per centrum grauitatis G transeuntem. Deinde si ponatur resistentia, quam patitur corpus cursu directo in directione GA motum, tanta, quantam pateretur figura plana ff eadem celeritate directe contra aquam mota atque resistentia lateralis, quam sufferet, si in directione GE moueretur, tanta, quantam pateretur figura plana hh eadem celeritate in aquam impingens; habeat motus obliquus hanc proprietatem vt sit tangens anguli HGB $=\frac{\sigma}{\rho}=\frac{shh}{rff}$; seu anguli MRB siue HGB tangens teneat ad tangentem anguli obliquitatis cursus AGL rationem vt hh ad ff hoc est vt resistentia lateralis ad resistentiam prorae. Vis denique resistentiae sit $=v\sqrt{(s^2h^4+r^2f^4)}$, in directione GH corpus vrgens; ita vt sit pro oblata obliquitate cursus $uu=\sqrt{(s^2h^4+r^2f^4)}$. His igitur positis nulla omnino erit vis tendens ad corpus circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendum et hancobrem positio axis nauis AB perpetuo in motu ma-

manebit eadem ſeu ſibi parallela. Poſtmodum autem cum ſit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$, erit $\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}{rff}$ ideoque $\sigma = \frac{sbb}{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}$ et $\rho = \frac{rff}{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}$; vnde fiet $s\sigma + r\rho = \frac{s^2b^2 + r^2f^2}{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}$ et $r\sigma - s\rho = \frac{rs(bb - ff)}{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}$: ex quibus elicitur primo retardatio motus $dv = -\frac{(s^2b^2 + r^2f^2)v\,dx}{V}$ atque declinatio a ſemita rectilinea tanta erit vt arculum circularem Gg deſcribat corpus cuius radius erit $= \frac{2V}{rs(bb-ff)}$.

Coroll. 1.

828. Cum anguli HGK ſinus ſit $= \frac{rs(bb-ff)}{\sqrt{(r^2f^4 + s^2b^4)}}$ patet ſi fuerit $b > f$ tum ſemper angulum MRG ſeu HGB fore maiorem angulo AGL praeter duos caſus quibus eſt vel s vel $r = 0$, hoc eſt ſi declinatio curſus AGL fuerit vel nulla vel 90 graduum.

Coroll. 2.

829. Ex hac igitur formula intelligitur fore alicubi differentiam inter angulos HGR et AGL maximam, qui locus ibi erit, ſi fuerit tangens anguli AGL $= \frac{f}{b}$, ſeu $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$; tum autem auguli HGB ſeu MRG tangens erit $= \frac{b}{f}$.

Coroll. 3.

830. Quoniam autem hic nulla adeſt vis corpus conuertens, ideoque axis AB eandem poſitionem perpetuo retinet, curſus directio GL a vi normali continuo verſus AB inflectetur ita vt tandem curſus in directum mutetur.

Coroll. 4.

831. Eo magis autem motus centri grauitatis a linea recta deflectetur, quo maior fuerit differentia inter resistentiam prorae et resistentiam lateris, hoc est quo minorem nauis in cursu directo secundum directionem BA patiatur resistentiam, simulque quo maior fuerit resistentia quam pateretur in directione FE mota.

Scholion 2.

832. Non sine graui ratione casum hunc attulimus, videtur enim haec proprietas, quam corpori in aqua oblique promoto hic tribuimus, maxime competere in naues, quae vento propelli solent. Primo enim in huius generis nauibus ad id imprimis attenditur, vt centrum resistentiae ex prora versus puppim remoueatur, et quasi in ipsam rectam verticalem per centrum grauitatis ductam incidat. Deinde resistentia lateralis vehementer excedere solet resistentiam cursus directi, ex quo sponte sequitur, quod supra iam annotauimus, in cursu obliquo directionem resistentiae multo magis ab axe nauis declinare. Idem autem satis commode formula assumta declarat, per quam angulo obliquitatis cursus cuius tangens est $= \frac{s}{r}$ respondet angulus, quem media directio resistentiae cum spina nauis constituit, cuius tangens est $= \frac{s}{r} \cdot \frac{bb}{ff}$ qui angulus ergo euanescit, si obliquitas euanescit, atque in rectum abit, si nauis directio ad spinam sit normalis, quae apprime conueniunt cum figura nauium recepta. Tertio quod posuimus vim resistentiae esse $= \sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}$ id quidem mirifice in structuram nauium receptam quadrat; facto enim $s = 0$, et $r = 1$, qui est casus cursus directi, resistentia fit $= ff$ vti assumsimus, similique modo si obli-

liquitas cursus ad angulum rectum declinet egregie prodit resistentia $= bb$. Praeterea vero patet si resistentia lateralis bb resistentiae prorae ff aequalis ponatur, tum omnium cursuum resistentiam fore quoque eandem; ac tandem ista expressio resistentiae ita est comparata, vt cum angulo MRB cuius tangens est $\frac{sbb}{rff}$ apprime conspiret, siquidem cum casibus supra tractatis conferatur. At harum proprietatum probatio si non apodictica tamen eiusmodi, in qua acquiescere liceat, afferri potest, qua euincetur hanc tum directionis resistentiae tum quantitatis rationem in nauibus locum inuenire. Resoluatur scilicet motus secundum directionem obliquam GL factus in duos laterales; quorum alter fiat in directione GA cuius celeritas erit $= r\surd v$, alter vero in directione GE ad istam normali, cuius celeritas erit $= s\surd v$. Iam quamuis in calculo resistentiarum non liceat motum decomponere tamen pro nostro instituto parum a veritate aberrabitur, si corpus duplici motu altero in directione GA cum celeritate $r\surd v$, altero in directione GE cum celeritate $s\surd v$ ferri ponamus. Propter illum autem motum resistentia quam patietur prora censeri potest se habere ad resistentiam quam latus perferet vt rff ad sbb, vnde directio media resistentiae GH angulum HGB constituet cuius tangens erit $= \frac{sbb}{rff}$, atque ipsius resistentiae quantitas fiet $= v\surd(s^2b^4 + r^2f^4)$ seu planum resistentiam exprimens erit $uu = \surd(s^2b^4 + r^2f^4)$. Ex hac consideratione noua hypothesis formari poterit ponendo resistentiam prorae non vt hic fecimus $= rff$, sed tantam, quanta foret si actu tanta celeritate promoueretur, scilicet $= r^2f^2$, similique modo resistentiam lateris $= s^2b^2$, vnde

de fiet anguli HGB tangens $= \frac{s^2 h^2}{r^2 f^2}$, atque ipſa vis reſiſtentiae $= v\sqrt{(s^4 h^4 + r^4 f^4)}$ ſed haec altera hypotheſis quam prior plus a veritate recedit, ſi figura ponatur circulus. Nam hoc caſu ſemper fit anguli HGB tangens $= \frac{s}{r}$, atque reſiſtentia eſt conſtans ſeu $uu = ff = bb$; id quod indicat prior hypotheſis, poſterior autem ſecus. Quamobrem priorem hypotheſin poſteriori merito praeferre conuenit, ideoque eam in ſequentibus prae aliis conſiderabimus. Eo minus autem prior illa hypotheſis a veritate aberrabit, ſi reuera naues ita fuerint comparatae, vt ſemper quemcunque curſum obliquum teneant, centrum reſiſtentiae in ipſum nauis centrum grauitatis cadat; quoniam enim hoc ipſum hypotheſis poſtulat, dubium non eſt, quin ſi naues in hoc conuenerint, reliqua eo minus ſint erratura.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tab. XXXVI fig. 1.

833. *Determinare vim venti et diſpoſititionem velorum quibus efficiatur vt nauis motu rectilineo ſub data curſus obliquitate vniformiter progrediatur; ſimulque velocitatem motus definire.*

Solutio.

Repraeſentet AEBF figuram nauis, in qua ſit G centrum grauitatis nauis, atque recta AB poſitio ſpinae ſeu axis longitudinalis a prora A ad puppim B ducti. Promoueatur autem centrum grauitatis G motu vniformi in directum per GL ſitque altitudo ipſius celeritati debita $= v$. Exhibet igitur angulus AGL curſus obliquitatem cuius ſinus ſit $= s$ coſinusque $= r$; quare cum nauis hanc obliquitatem conſtanter retinere ponatur, reſiſtentia quoque per-

perpetuo manebit eadem eiusque directio erit RM, quae cum AB angulum MRB constituat, cuius sinus sit $=\sigma$ et cosinus $=\varrho$, resistentia vero ipsa tanta sit, quantam pateretur figura plana $\underline{u}\,\underline{u}$ planitie sua directe contra aquam eadem celeritate $\sqrt{2v}$ impingens; quae omnia dabuntur ex data nauis structura et data obliquitate, ita vt σ, ϱ et u^2 $a\,b\,r$, s et quantitatibus per nauem datis pendeant. Hinc erit vis resistentiae in directione RM vrgens $= uuv$, seu posito nauis pondere $=$ M et volumine partis submersae $=$ V, aequabitur vis resistentiae ponderi $\frac{Mu^2v}{V}$. Cum igitur haec vis non solum motum retardet, sed etiam directionem et cursus obliquitatem mutet, eam per vim venti destrui oportebit. Hoc enim si fuerit praestitum, perspicuum est cessante causa motum perturbante, nauem celeritatem suam $\sqrt{v}$ retinere, eaque vniformiter in directum incedere atque insuper obliquitatem suam immutatam conseruare debere. Aliter autem haec vis resistentiae prorsus destrui non potest, nisi directio vis venti incidat in directionem resistentiae RM, atque simul vis venti aequalis sit et contraria vi resistentiae. Cum igitur vis venti ad vela sit normalis, oportet vt superficies velorum ad rectam RM sit normalis, atque centrum grauitatis commune velorum in eandem verticalem cum centro resistentiae R cadat, siquidem vela semper centrum suum grauitatis in axe AB habent positum, sit itaque $\underline{e}\;\underline{f}$ velorum directio, quae sit normalis ad MR, atque venti vis tanta esse debebit vt aequet vim resistentiae $\frac{Mu^2v}{V}$. Ponatur autem superficies velorum plana $= gg$, atque ventus flet in directione VR celeritate $\sqrt{c}$, sitque anguli $V\,v\,C$ sinus $=\mu$ et cosinus $=\nu$. Ad vim venti vero

 co-

cognoſcendam, definiendi ſunt ſinus angulorum VRf et C rf, quorum ille ſi fuerit $= m$ hic vero $= q$ erit vis venti in directione RN vrgens $= (m\sqrt{c} - q\sqrt{v})^2 gg (794)$ ſeu aequalis erit ponderi $\frac{M(m\sqrt{c}-q\sqrt{v})^2 gg}{784 V}$. At eſt ſin. C$rf$ $=$ coſ. R $nr =$ coſ. (MRG$-$AGL) et coſ. C$rf = -$ ſin. R$nr = -$ ſin. (MRG $-$ AGL; vnde prodit anguli C rf ſinus $q = s\sigma + r\varrho$ et coſinus $= s\varrho - \sigma r$. Deinde cum ſit ſin. VR$f =$ ſin. (C$rf +$ CvV) erit $m = v\ (s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$; ideoque vis venti $= \frac{M(v(s\sigma+r\varrho)\sqrt{c}-\mu(r\sigma-s\rho)\sqrt{c}-(s\sigma+r\rho)\sqrt{v})^2 g^2}{784\ V}$ cuius directio iam eſt contraria directioni reſiſtentiae RM, ſupereſt ergo tantum vt ipſa vis fiat aequalis vi reſiſtentiae $\frac{Mu^2 v}{V}$ vnde obtinebitur iſta aequatio $28\ u\sqrt{v} = v(s\sigma + r\varrho) g\sqrt{c} - \mu(r\sigma - s\varrho) g\sqrt{c} - (s\sigma + r\varrho) g\sqrt{v}$ ex qua aequatione vel celeritas venti $\sqrt{c}$ vel celèritas nauis $\sqrt{v}$ determinari poterit; ſi igitur ponamus velocitatem venti datam, reperietur celeritas, qua nauis ſub data obliquitate curſus AGL in data linea recta GL mouebitur $= \sqrt{v} = \frac{(v(s\sigma+r\varrho)-\mu(r\sigma-s\rho))g\sqrt{c}}{28u+(s\sigma+r\rho)g}$. Oportet autem vt ſit m ſeu eius valor $\nu(s\sigma + r\varrho) - \mu(r\sigma - s\varrho)$ ſit affirmatiuus, nam ſi fieret negatiuus, ventus vela non in directionem RN ſed oppoſitam RM intenderet; quamobrem hi caſus probe ſunt excipiendi. Idem quidem ipſa expreſſio inuenta luculenter declarat, cum ſi m obtineat valorem negatiuum, quoque celeritas $\sqrt{v}$ fiat negatiua, quod indicio eſt tum nauem non in directione GL ſed contraria GC eſſe inceſſuram. Q. E. I.

Coroll. 1.

834. Si anguli RnG, qui eſt exceſſus anguli MRB ſupra angulum AGL, ſinus ponatur $= p$ et coſinus $= q$ erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, vnde reperietur celeritas nauis $\sqrt{v} = \frac{(\nu q - \mu p) g\sqrt{c}}{28u + qg}$.

Co-

Coroll. 2.

835. At $\nu q - \mu p$ exprimit cosinum summae angulorum, quorum sinus sunt p et μ. Quare ne iste cosinus vti requiritur fiat negatiuus, oportet vt summa angulorum VvC + Rnv minor sit angulo recto.

Coroll. 3

836. Si ergo dentur venti directio VR, via describenda GL et obliquitas cursus AGL a qua velorum positio pendet, celeritas nauis eo maior erit, quo maior fuerit celeritas venti idque in eadem ratione.

Coroll. 4.

837. Si centrum resistentiae R locum habeat variabilem, pro variis cursus obliquitatibus, tum centrum grauitatis velorum debebit quoque mutari, quoniam vis venti vnico modo vim resistentiae destruere potest.

Scholion 1.

838. Nisi igitur centrum resistentiae R pro omnibus obliquitatibus cursus fixum teneat locum vnicus malus nullum praestabit vsum in variis cursibus obliquis conservandus. Sin autem nauis pluribus malis fuerit instructa, tum vtique vela ita attemperari poterunt, vt eorum commune centrum grauitatis verticaliter puncto R quouis casu immineat; sed hoc casu pro quolibet obliquitatis cursu necesse foret locum centri resistentiae R exactissime nosse, id quod in praxi vix sperari potest. Tentando autem difficillimum foret vela malorum ita moderari, vt desidera-

tum effectum praestarent, cum duabus conditionibus perfecte satisfieri debeat. Primo enim ea resistentiae vis destrui debet, quae nauem de cursu rectilineo declinare conatur, haecque est vis normalis ad semitam GL ex resolutione vis resistentiae orta; haec igitur vis infinitis modis per ventum destrui potest, dummodo vis normalis ad semitam GL ex resolutione vis venti orta illi sit aequalis et contraria, neque ad hoc refert, in quo loco axis AB ea sit applicata. Deinde vero vis resistentiae etiam quae tendit ad nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem conuertendam est destruenda, quare momentum vis venti respectu huius axis aequale et contrarium esse debebit momento vis resistentiae respectu eiusdem axis cui conditioni iterum innumeris modis satisfieri potest. At quo vtraque vis resistentiae destruatur vnicus datur modus, quem proin tentando deprehendere quouis casu vix est sperandum. Hancobcausam vtilissimum erit naues ita construere, vt centrum resistentiae in iis fixum teneat locum, atque adeo in centrum grauitatis incidat, tum enim, cum vis resistentiae nauem conuertens sit nulla, satis facile erit alteram vim destruere.

Scholion 2.

839. Posuimus in solutione huius problematis proram A in partem viae CL contrariam cadere ei, ex qua ventus V venit, similis autem euadet solutio, si prora in eandem plagam declinet a recta GL, cuiusmodi casus in figura hic allegata est repraesentatus. Si enim vt ante fuerit anguli declinationis cursus AGL sinus $= s$ cosinus $= r$, anguli vero

Tab. XXXIV. fig. 2.

vero MRB, quem media directio resistentiae cum axe nauis constituit, sinus $= \sigma$ et cosinus $= \varrho$; vela $e f$ ita expandi debebunt vt sint normales ad RM. Sit porro vt ante planities velorum $= gg$, et venti celeritas $= \sqrt{c}$, atque anguli VvC quem directio venti cum via describenda CL constituit sinus $= \mu$, cosinusque $= v$; ac tandem superficies plana uu exprimat vim resistentiae absolutam. Manifestum est priorem casum ad hunc reduci, si fiant s et σ negatiua, quoniam anguli AGL et MRB in contrarias partes cadunt. Hinc igitur prodibit celeritas, qua nauis vniformiter in directione GL progredi poterit, $= \frac{(v(s\sigma + r\rho + \mu(r\sigma - s\rho))g\sqrt{c}}{2\varrho u + (s\sigma + r\rho)g}$ quae eadem expressio prodiisset si tantum μ positum fuisset negatiuum. Si ergo anguli GnR qui est excessus anguli MRB supra AGL, sinus ponatur p et cosinus $= q$, erit $p = r\sigma - s\varrho$ et $q = s\sigma + r\varrho$, atque celeritas nauis ad motum vniformem in directum conseruandum prodibit $= \frac{(vq + \mu p)g\sqrt{c}}{2\varrho u + qg}$, quae a superiore forma hoc tantum discrepat, quod sinus anguli VvC, qui est $= \mu$ negatiue sit sumtus.

Coroll. 1.

840. Quoniam sinus anguli VRf, qui est $= vq + \mu p$ semper debet esse affirmatiuus, debebit esse $vq + \mu p > 0$, at $vq + \mu p$ est cosinus differentiae angulorum VvC et RnC quare horum angulorum differentia debet esse recto minor.

Coroll. 2.

841. Angulus ergo VvC poterit esse recto maior, dummodo rectum minore angulo excedat, quam est an-

 gulus

gulus $R n C$. Quamobrem ſi angulus MRB maior fuerit quam angulus AGL, curſus adeo ita inſtitui poterit vt angulum $V v L$ cum plaga e qua ventus venit acutum conſtituat.

Coroll. 3.

842. Maxime igitur adverſus ventum licebit curſum nauis inſtituere, ſi naui ea obliquitas curſus tribuatur, in qua angulus MRB maxime ſuperat angulum AGL.

Coroll. 4.

843. Quoniam autem, quo magis curſus aduerſus ventum dirigitur, expreſſio $\nu q + \mu p$ eo fit minor, manifeſtum eſt quo magis nauis aduerſus ventum propellatur, eo tardiorem fore eius motum; indeque lucrum non augeri. Dabitur ergo eiusmodi diſpoſitio, qua maxime in uenti regionem curri poterit.

Exemplum 1.

Tab. XXXIV. fig. 1.

844. Habeat nauis eam proprietatem, quam ſupra recepimus, vt centrum reſiſtentiae R in ipſum nauis centrum grauitatis G incidat, atque ſi reſiſtentiae in curſu directo tanta ſit quanta figurae planae ff reſiſtentia eadem celeritate contra aquam impingentis, reſiſtentia vero in curſu obliquo maximo, cuius obliquitas ſit 90 grad. ſimili modo reducta ſit ad planum bb; tum vero ſit anguli MRB tangens $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$ ſeu $\sigma = \frac{sbb}{\sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}}$ et $\varrho = \frac{rff}{\sqrt{(s^2b^4 + r^2f^4)}}$; atque reſiſtentia in hoc curſu obliquo, ſeu uu ſit $= \sqrt{(s^2 b^4 + r^2 f^4)}$, vnde fit $u = \sqrt[4]{(s^2 b^2 + r^2 f^4)}$. His poſi-

pofitis erit $p = r\sigma - s\varrho = \frac{rs(b^2-f^2)}{\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}}$ et $q = s\sigma + r\varrho = \frac{s^2b^2+r^2f^2}{\sqrt{(s^2b^4+r^2f^4)}}$, ex quibus reperitur celeritas huius nauis, qua vniformiter in directione GL incedere poterit feu $\sqrt{v} = \frac{(\nu(s^2b^2+r^2f^2)-(urs(b^2-f^2))g\sqrt{c}}{2s\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$. At fi prora A dirigatur in eam regionem rectae CL ex qua ventus venit, tum manentibus omnibus vt ante, erit tantum μ in negatiuum transmutato celeritas nauis progreffiua $= \frac{(\nu(s^2b^2+r^2f^2)+\mu rs(b^2-f^2))g\sqrt{c}}{2s\sqrt[4]{(s^2b^4+r^2f^4)^3}+(s^2b^2+r^2f^2)g}$.

Tab. XXXIV. fig. 2.

Coroll. 1.

845. Maiorem igitur nauis obtinebit celeritatem, fi vt in cafu pofteriore axis nauis AB ita inclinetur vt prora A in eam plagam collocetur, ex qua ventus venit, ceteris paribus fcilicet manente eadem curfus obliquitate.

Coroll. 2.

846. Anteferendi igitur funt illi curfus in quibus prora A fupra viam GL cadit, iis quibus prora A infra GL cadit: quia non folum iftae obliquitates cum maiore celeritate funt connexae fed etiam multo plures obliquitates locum inueniunt.

Coroll. 3.

847. Pofita autem obliquitate curfus deorfum fpectante vt in priore cafu, limites omnium curfuum erunt $s = 0$ et haec aequatio $\nu s^2b^2 + \nu r^2f^2 = \mu rs(bb-ff)$ ex qua anguli obliquitatis curfus tangens fit $= \frac{\mu(b^2-f^2) \pm \sqrt{(\mu^2(b^2-f^2)^2-4\nu^2f^2b^2)}}{2\nu b^2}$ vnde bis angulus VRf euanefcit.

Coroll. 4.

848. Cafu autem altero, quo prora A fupra CL

con-

conuertitur omnes obliquitatis curſus gradus continentur inter hos limites, quorum alterum conſtituit obliquitatis tangens $= 0$, alterum quo iſta tangens aequatur $-\frac{\mu(b^2-f^2)\pm\sqrt{(\mu^2(b^2-f^2)^2-4\nu^2 f^2 b^2)}}{2\nu b^2}$ vbi ſignum $-$ limitem prioris caſus praebet; ita vt ſuperius ſignum $+$ tantum pro hoc caſu valeat.

Coroll. 5.

849. Quod autem manentibus ceteris ad directionem venti attinet, manifeſtum eſt generaliter eum ventum celerrime nauem propellere cuius directio ad planitiem velorum ſit normalis. Celeritas enim ceteris paribus eſt directe vt ſinus anguli, quem directio venti cum velis conſtituit.

Coroll. 6.

850. Si vela in infinitum augerentur tum prodiret celeritas nauis $= \nu\sqrt{c} + \frac{\mu r s(b^2-f^2)}{s^2 b^2 + r^2 f^2}\sqrt{c}$ ex quo nauis maximam obtinebit celeritatem ſi anguli obliquitatis curſus fiat $= \frac{f}{b}$; niſi angulus VvC fuerit vehementer exiguus.

Coroll. 7.

851. Sin autem quaereretur curſus obliquitas, qua nauis a dato vento propulſa in data directione celerrime promoueatur, aequatio reperitur vehementer perplexa, vt nil inde concludi queat; quae autem facto g infinito praebet $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$. Ipſa autem aequatio generaliter determinans angulum AGL eſt ſequens pro caſu priore, prora ſupra CL ſita $\mu g(r^2 f^2 - s^2 b^2)\sqrt[4]{(s^2 b^4 + r^2 f^4)} = \begin{matrix}+2\mu s^4\\+\mu r^2 s^2\\+\nu r s^3\end{matrix}\, b^4 - 3\nu r s f^2 b^2 \begin{matrix}-2\mu r^4\\-\mu r^2 s^2\\+\nu r^3 s\end{matrix}\, f^4$.

Coroll.

Coroll. 8.

852. Si venti directio Vv congruat cum directione motus praescripta CL, erit $\mu = 0$, et $\nu = 1$ vnde prodit $rs(s^2b^4 - 3f^2b^2 + r^2f^4) = 0$; quae tres casus continet primo $s = 0$, quo cursus obliquitas euanescit motusque fit celerrimus, secundo $r = 0$, quo nauis in latus promouetur, motusque fit tardissimus, tertio denique fit $s^2 = \frac{ff(3bb-ff)}{b^4-f^4}$ et $s = \frac{f\sqrt{(3b^2-f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4)}}$ atque $r = \frac{b\sqrt{(b^2-3f^2)}}{\sqrt{(b^4-f^4)}}$ quo casu fit celeritas $= \frac{g\sqrt{c}}{\frac{7(ff+bb)}{\sqrt{fb}}\sqrt[4]{27}+g}$, quae est omnium minima, si quidem sit $b^2 > 3ff$.

Exemplum 2.

853. Habeat nauis alteram proprietatem supra memoratam (832) vt centrum Resistentiae R in nauis centrum grauitatis G incidat, atque si vt ante resistentia prorae et lateris exprimatur figuris planis ff et bb, vt sit anguli MRB tangens $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$ seu $\sigma = \frac{s^2b^2}{\sqrt[2]{(s^4b^4+r^4f_4)}}$ et $\rho = \frac{r^2f^2}{\sqrt{s^4(b^4+r^4f^4)}}$, atque resistentia in hoc cursu seu uu sit $= \sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}$, vnde erit $u = \sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)}$. His positis habebitur $p = r\sigma - s\rho = \frac{sr(sb^2-rf^2)}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$, et $q = s\sigma + r\rho = \frac{s^3b^2+r^3f^2}{\sqrt{(s^4b^4+r^4f^4)}}$: ex quibus reperitur celeritas nauis, qua in directione GL aequabiliter progredietur $= \frac{(\nu(s^3b^2+r^3f^2)-\mu(s^2rb^2-sr^2f^2))g\sqrt{c}}{28\sqrt[4]{(s^4b^4+r^4f^4)^3}+(s^3b^2+r^3f^2)g}$. At si prora A dirigatur in alteram partem rectae CL, haec eadem expressio valebit praeterquam quod loco μ scribi debeat $-\mu$.

Tab. XXXIV Fig. 1.

Scholion 3.

854. Inſigne atque maxime vtile problema hic occurrit, quo ex datis directione venti VR et via a naui deſcribenda CGL ſeu ex dato angulo $Cv V$ definienda eſt curſus obliquitas ſeu angulus AGL, quo fiat vt nauis celerrime promoueatur. Problema quidem hoc iam reſoluimus pro exemplo ſecundo (851); verum ad eiusmodi aequationem pertigimus, ex qua obliquitas deſiderata difficillime erui poteſt, neque etiam approximationibus vti licet cum aequatio ad rationalitatem reducta fiat ſedecim dimenſionum. Maior autem difficultas oriretur, ſi idem problema pro exemplo ſecundo tentare vellemus. Interim tamen rem generaliter conſiderando quodammodo curſus maxime lucroſus aeſtimari poterit. Cum enim celeritas inventa ſit $= \frac{(\nu q + \mu p) g \sqrt{c}}{2 \delta u + q g}$ in qua expreſſione μ eſt ſinus et ν coſinus anguli dati $V v C$, p vero et q ſinus et coſinus anguli RnG qui ab angulo quaeſito AGL pendet; uu autem exprimit reſiſtentiam, quam nauis curſu obliquo perfert, quo adeo etiam a p et q pendet. Quamobrem cum nexus inter u et p non conſtat, per methodum maximorum et minimorum valor ipſius p vel q definiri non poterit, quo celeritas nauis fiat maxima. At quoniam numerator expreſſionis iſtius ſcilicet $\nu q + \mu p$ praebet ſinum anguli VRf, quem directio venti VR cum planitie velorum ef conſtituit, manifeſtum eſt hunc numeratorem non mutari, ſi poſitio velorum ef ita immutetur vt angulus VRf fiat obtuſus, deinceps poſito angulo priori VRf hoc eſt, ſi obliquitas curſus ita ſumatur, vt media directio reſiſtentiae RM intra angulum $V v C$ cadat quem caſum

Tab. XXXIV fig. 2.

casum in figura citata expressimus in qua vt ante VR est directio venti, RM media directio resistentiae intra Vv et Cn posita. Cum igitur hoc casu sinus anguli VRf cum praecedente congruat, ideoque numerator fractionis velocitatem nauis exprimentis sit idem, denominator spectari debet, qui est $28u + qg$, de quo primum patet u minorem habere quantitatem quam casu praecedente, quoniam cursus hic minus est obliquus, atque resistentia augetur, quo magis obliquitas crescit. Altera vero denominatoris pars qg in qua q, est cosinus anguli GnR, vel crescere potest vel decrescere, vel etiam eadem manere. Si enim obliquitas est valde parua tum quidem angulus GnR fit perquam exiguus, ideoque q, fere sinui toti aequatur, at vero quoque, si obliquitas vehementer fit magna, tum pariter angulus GnR decrescit, obliquitate enim ad 90 gradus aucta, media directio resistentiae iterum in directionem cursus incidit. Quocirca ista cursus mutatione, cum q aeque augeri ac dimininui potuerit, ex altera parte $28u$, quae certe minor est facta concludendum est istam cursus dispositionem antecedenti esse praeferendam eaque nauem celerius promoueri. His igitur praenotatis videamus, quomodo per approximationem cursus maxime velox definiri queat, si quidem datae fuerint venti directio VR et via absoluenda GL seu angulus VvC cuius sinus est μ et cosinus ν.

Tab. XXXIII fig. 2.

PROPOSITIO 81.
Problema.

855. *Si data fuerit venti directio* VR *atque itineris conficiendi via* GL, *determinare cursus obliquitatem* AGL, *qua navis maxima celeritate promoueatur.*

Tab. XXXIII. fig. 2.

 Solutio

Solutio.

Sit anguli VvC, qui eſt datus, ſinus $=\mu$ coſinus $=\nu$, curſus autem obliquitatis AGL ſinus $=s$ et coſinus $=r$; quos definire oportet, vt prodeat celeritas nauis maxima. At celeritas nauis, quam ſub hac curſus obliquitate habebit eſt $=\frac{(\nu q+\mu p)g\sqrt{c}}{2s\,u+qg}$; in qua expreſſione p et q ſunt ſinus et coſinus anguli RnG, qui eſt exceſſus anguli MRB ſuper angulum AGL. Primo autem notandum eſt hunc angulum RnG, ab initio creſcente obliquitate creſcere, at ad certum tantum terminum augeri, quem cum attigerit, ſi obliquitas curſus magis augeatur, iterum diminui, reſiſtentiam vero ſeu quantitatem u continuo augeri, quamdiu obliquitas creſcat. Ponamus igitur eum aſſumtum eſſe curſum obliquum AGL cui maximus angulus RnG reſpondeat; manifeſtum eſt, ſi obliquitas aliquantillum vel augeatur vel diminuatur angulum RnG quantitatem ſuam conſeruare, et proinde p et q non mutari. Hinc ergo perſpicuum eſt ſi angulus AGL magis augeatur, tum ob creſcentem u velocitatem nauis diminui, contra vero augeri, ſi obliquitas curſus AGL diminuatur. Ex quo ſatis luculenter ſequitur ad motum celerrimum obtinendum angulum AGL minorem accipi debere eo, cui angulus RnG maximus reſpondet. Sit igitur hic angulus AGL minor ſeu talis, quo creſcente angulus RnG creſcat; ponamusque angulum AGL aliquantillum augeri, ita vt eius ſinus s creſcat particula ds; augebitur igitur etiam anguli RnG ſinus p aliqua particula, quae ſit $=mds$; coſinus vero q decreſcet particula $\frac{mpds}{q}$; reſiſtentia vero ita creſcat vt u augeatur particula ads eritque ideo $dp=mds$; $dq=-\frac{mpds}{q}$ et d

$u=$

$u = nds$. Ex his autem prodibit celeritatis quae est $= \frac{(\nu q + \mu p) g \surd c}{28 u + \nu g}$ augmentum $= \frac{(\mu g m + 28 (n u (\mu q - \nu p) - 28 n q (\mu p + \nu q)) g d s \surd c}{q (28 u + q g)^2}$. Cuius fractionis numerator si fuerit affirmatiuus, tum nauis aucta obliquitate cursus vti posuimus reale accipiet augmentum, at si numerator fuerit negatiuus tum celeritas decrescet. At est $\mu q - \nu p$ sinus anguli VRM et $\mu p + \nu q$ eiusdem anguli cosinus. Quare si ponatur anguli V R M sinus $= x$ et cosinus $= y$, aucta cursus obliquitate nauis celerius progredietur si fuerit $\mu g m + 28 m u x - 28 n q y > 0$ tardius autem si fuerit $\mu g m + 28 m u x - 28 n q y < 0$. Hancobrem quo nauis celerrime progrediatur, oportet cursum ita institui, vt sit $\frac{\mu g m}{28} = n q y - m u x$. Ex qua reperitur angulum VRM differentiam esse debere duorum angulorum, quorum maioris sinus sit $= \frac{n q}{\surd (n^2 q^2 + m^2 u^2)}$, minoris vero sinus $= \frac{\mu g m}{28 \surd (n^2 q^2 + m^2 u^2)}$. Sunt autem omnes quantitates quae hic occurrunt, affirmatiuae, vnde non difficile erit obliquitatem cursus aestimare quouis casu oblato. At commodissime negotium conficietur, si pro quouis casu angulus quicunque inter limites assignatos accipiatur, atque inquiratur, vtrum eo aliquantillum aucto celeritas augeatur, an diminuatur, ex quo statim colligetur, vtrum obliquitas desiderata excedat assumtam, an ea sit minor Q. E. I.

Coroll. 1.

856. Si assumatur primum obliquitas nulla seu cursus ponatur directus, erit $p = 0$ et $q = 1$ atque $u = f$, siquidem planum ff exprimat resistentiam cursus directi; celeritasque corporis erit $= \frac{\nu g \surd c}{28 f + g}$ si nunc obliquitas infinite

te parua conſtituatur erit $du = nds = 0$, atque manente $dp = mds$, erit celeritatis incrementum $= \frac{(\mu gm + 2\delta\mu mf)gds\sqrt{c}}{(2\delta f + g)^2}$.

Coroll. 2.

857. Apparet igitur niſi ſit $\mu = 0$ ſeu niſi ventus a puppi veniat, curſum directum non celerrimum producere motum, ſed curſum quendam obliquum eſſe praeſerendum. Excepto tamen eo caſu quo $\frac{dp}{ds}$ in curſu directo euaneſcit, quippe quo curſus directus ſemper habet maximum minimumue ſed non ſemper eius modi quale hic deſideratur.

Coroll. 3.

858. Euaneſcat in curſu directo $\frac{dp}{ds}$, vt $\underline{m}$ et $\underline{n}$ ſint quantitates infinite paruae; atque curſus directus celerrimum motum producet, ſi fuerit $\mu gm + 2\delta\mu mf < 2\delta\nu n$, hoc enim caſu, minima obliquitate celeritas diminueretur.

Coroll. 4.

859. Si igitur euaneſcente $\underline{s}$ ſimul euaneſcet $\frac{dp}{ds}$ curſu directo nauis celerrime progredietur quamdiu anguli VvC tangens $\frac{\mu}{\nu}$ non excedit hunc limitem $\frac{2\delta n}{m(2\delta f + g)}$. At ſi $\frac{dp}{ds}$ non euaneſcat euaneſcenre $\underline{s}$ curſus obliquus ſemper eſt praeferendus, niſi ventus a puppi flet.

Coroll. 5.

860. Si ergo fuerit ſaltem pro obliquitatibus minimis $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2b^2}{r^2f^2}$, et $u^2 = \sqrt{(s^4b^4 + r^4f^4)}$ erit ſi $\underline{s}$ minimum ſeu infinite paruum $\frac{dp}{ds} = -1 = m$, et $\frac{du}{ds} = 0$, vnde celeritas

leritas etiam maior prodibit ſi prora A in partem oppoſitam rectae GL declinetur. Hoc enim caſu euaneſcente s fit $\frac{\sigma}{\rho} < \frac{s}{r}$.

Coroll. 6.

861. At caſu quo fit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s b^2}{r f^2}$, qui magis nauibus congruit erit $\frac{dp}{ds} = \frac{b^2 - f^2}{f^2}$ euaneſcente s; Quare cum $b > f$ his caſibus curſus obliquus ſemper erit vſurpandus, niſi ventus directe in curſus directionem incidat.

Scholion.

862. Quanquam in caſu, quo ponitur $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{s^2 b^2}{r^2 f^2}$ in ipſo initio ſeu obliquitatibus minimis p negatiuum induit valorem, tamen quam primum fit $\frac{s}{r} > \frac{f}{b}$ eius valor fit affirmatiuus. Quamobrem etiam in hoc caſu, niſi angulus VvC ſit minimus, obliquitas curſus ad ſuperiorem partem rectae GL erit dirigenda, ſiquidem nauis celerrime debeat progredi. Neglectis igitur anomaliis iſtis, quae tantum in minimis obliquitatibus hoc ſolo caſu ſe offerunt, ad motum velociſſimum obtinendum obliquitas debebit dirigi in ſuperiorem partem lineae GL ita vt angulus AGL, eo modo quo rem ſumus contemplati fiat affirmatiuus. Deinde autem ex circumſtantiis allatis facile colligitur, quo maior ſit angulus VvC eo maiorem capi debere obliquitatem. At obliquitatem nunquam maiorem accipi conuenit quam eſt ea cui reſpondet angulus RnG maximus, ſi igitur iſte angulus obliquitatis AGL pro quo maxima eſt differentia inter angulos MRG et AGL ponatur α graduum, et angulus RnG β graduum, limites intra

intra quos angulus obliquitatis curſus A G L contineri debet erunt 0° et α°, quorum limitum ille 0° locum habet ſi angulus $V v C$ euaneſcat, alter autem ſolus in vſum vocari poteſt quando angulus $V v C$ proxime erit $90 + \beta$ graduum, ſi enim angulus $V v C$ maior fuerit quam $90 + \beta$ graduum tum nauis nequidem in directione data GL promoueri poteſt, ex quo cum angulo $V v C = 0$ grad. respondeat angulus $AGL = 0$ grad. atque angulo $V v C = 90 + \beta$ graduum reſpondeat angulus $AGL = \alpha$ graduum, ſatis prope pro angulis $V v C$ intermediis conuenientes angulos AGL aſſignare licebit, idque eo facilius praeſtabitur ſi pro vno alteroue angulo $V v C$ intermedio per methodum datam angulus AGL aptiſſimus definiatur ſola autem aeſtimatione ad veritatem ſatis prope accedetur, ſi pro angulo $V v C$ continente x gradus capiatur curſus obliquitas $AGL = \frac{\alpha x}{90 + \beta}$ graduum vel forte $\frac{\alpha x^2}{(90 + \beta)^2}$ graduum, vel generalius $\frac{\alpha x n}{(90 + \beta)^2}$ graduum; quae formula in vſum vocari poterit, ſi pro dato quodam angulo $V v C$ angulus AGL maxime congruus actu fuerit determinatus, eo enim exponens n definietur. Anguli autem α et β ex data nauis proprietate facile determinabuntur; ſi enim fuerit $\frac{\sigma}{\rho} = \frac{sbb}{rff}$ erit anguli $R n G$ tangens $= \frac{sr(bb - ff)}{s^2 b^2 + r^2 f^2}$; qui ideo erit maximus ſi fuerit $\frac{s}{r} = \frac{f}{b}$; ſeu anguli AGL tangens $= \frac{f}{b}$ Tum autem erit anguli MRB tangens $= \frac{b}{f}$; atque differentiae $R n G$ tangens $= \frac{bb - ff}{2fb}$; ſeu erit $\beta = 90^\circ - 2\alpha$ vnde pro varia relatione inter quantitates ff et bb, quae eam inter ſe rationem habent, quam habet reſiſtentia nauis in directione GA mota ad reſiſtentiam nauis in directione

GE

GE mota, anguli α et β cognoſcentur, quod quo facilius pateat ſequentem tabellam adiungere viſum eſt

$bb = ff$	$\alpha = 45°$	$\beta = 0°, 0'$
$bb = 2ff$	$\alpha = 35°, 16'$	$\beta = 19°, 28'$
$bb = 3ff$	$\alpha = 30°, 0'$	$\beta = 30°, 0'$
$bb = 4ff$	$\alpha = 26°, 34'$	$\beta = 36°, 52'$
$bb = 5ff$	$\alpha = 24°, 6'$	$\beta = 41°, 48'$
$bb = 6ff$	$\alpha = 22°, 12'$	$\beta = 45°, 36'$
$bb = 7ff$	$\alpha = 20°, 42'$	$\beta = 48°, 36'$
$bb = 8ff$	$\alpha = 19°, 28'$	$\beta = 51°, 4'$
$bb = 9ff$	$\alpha = 18°, 26'$	$\beta = 53°, 8'$
$bb = 10ff$	$\alpha = 17°, 33'$	$\beta = 54°, 54'$

Cum autem quo maior eſt angulus β, eo magis aduerſus ventum curſus inſtitui queat, liquet quo maior fuerit longitudo nauis reſpectu latitudinis eo magis aduerſus ventum nauigari poſſe; tenet enim ff ad bb proxime rationem latitudinis nauis maximae ad ipſius longitudinem. In nauibus autem vſu receptis proxime eſt $bb = 4ff$, ex quo eae aptae ſunt aduerſus ventum nauigare, ita vt angulus VvI fiat fere $53°, 8'$ ſeu angulus VvC, $126°, 52'$ id quod cum experientia egregie conuenit qua naues obſeruantur ad 11 Rhombos ſeu $123\frac{3}{4}$ gradus dirigi poſſe.

PROPOSITIO 82.

Problema.

863 *Definire curſum a naui inſtituendum, quo celerrime in regionem, ex qua ventus venit prouehatur.* Tab. XXXV. fig. 1.

 Solutio

Solutio.

Sumatur primo ad lubitum obliquitas nauis AGL cuius anguli finus fit s, cofinus $= r$: veniatque ventus in directione Vv pariter data, et quaeratur pofitio lineae GL refpectu Vv vt curfus in regionem ex qua ventus venit, maxime properetur. Qaeritur ergo angulus VvL cuius finus fit $= \mu$, cofinus $= \nu$. Ex angulo autem obliquitatis curfus dato AGL, dabitur media directio refiftentiae RM quae cum directione curfus GL angulum faciat RnG cuius finus fit $= p$ cofinus $= q$. Iam pofitis vt ante celeritate venti $= \sqrt{c}$, planitie velorum $= gg$, et plano refiftentiam exprimente $= uu$, erit celeritas qua nauis in directione GL ingredietur $= \frac{(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2 b u + q g}$; vbi ν fecimus negatiuum, quia angulum VvL acutum ponimus. Cum igitur nauis incedat in directione GL angulum acutum cum directione venti Vv conftituente, dum fpatium vL percurrit, in regionem, ex qua ventus venit, acceffit fpatio Ll, ducta vl perpendiculari ad directionem venti Vv et Ll ipfi parallela. Hinc nauis hoc curfu ad uentum accedit celeritate $= \frac{\nu(\mu p - \nu q) g \sqrt{c}}{2 b u + q g}$ quae maxima effe debet. Cum ergo obliquitas curfus AGL data ponatur, differentietur ea ponendis μ et ν variabilibus, atque differentiale ponatur $= 0$: prodibit autem ob $d\nu = - \frac{\mu d\mu}{\nu}$ ifta aequatio $(\mu^2 + \nu^2) p = 2 \mu \nu q$, ex qua oritur $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q + 1}{p}$. Quare cum anguli LvV tangens fit $= \frac{q+1}{p}$ erit angulus ipfe $LvV = 90° - \frac{1}{2} Rng$ feu angulus Lvl aequabitur femiffi anguli Rng. Naue itaque ad curfus obliquitatem datam AGL inftructa, angulus RnG bifecetur recta np, nauisque vento ita obuertatur

tur vt directio venti Vv ad illam rectam np sit normalis. Quoniam vero est $\frac{\mu}{\nu} = \frac{q+1}{p}$ erit $\mu = \frac{q+1}{\sqrt{(2+2q)}} = \sqrt{\frac{(q+1)}{2}}$, et $\nu = \sqrt{\frac{1-q}{2}}$; vnde celeritas qua nauis ad ventum accedit erit $= \frac{(1-q)g\sqrt{c}}{2(2\delta u+qg)}$. Si nunc quaeratur angulus obliquitatis cursus AGL, qui reddat hanc expressionem $\frac{1-q}{2\delta u+qg}$ maximam, tum habebitur ille nauis cursus, quo omnium celerrime nauis in regionem venti promouetur. Ante omnia autem intelligitur ex praecedentis problematis solutione cursus obliquitatem minorem accipi debere, quam est ea, cui angulus RnG maximus respondet. Ac si ponamus dum p crescit elemento dp, interea crescere u elemento ndp, prodibit anguli RnG tangens $\frac{p}{q} = \frac{2\delta n}{2\delta u+g}$: quae expressio cum maior fuerit, quam tangens anguli RnG, si est maximus, tum ipse angulus maximus seu proxime minor erit adhibendus. Quouis autem casu particulari oblato ista quaestionis pars, quae ad ipsius obliquitatis cursus determinationem spectat, facile resoluetur. Q.E.I.

Coroll. 1.

864. Cum angulus VRe, sub quo ventus in vela irruit sit complementum anguli nRv ad rectum, aequabitur quoque angulus VRe semissi anguli GnR eiusque ideo sinus erit $\sqrt{\frac{1-q}{2}}$.

Coroll. 2.

865. Deinde etiam notandum est angulum VvL quem directio venti cum via describenda GL constituit cum angulo VRe angulum rectum conficere.

Coroll. 3.

866. Cum celeritas qua nauis verſus ventum appropinquat ſit $= \frac{(1-q)g\sqrt{c}}{2(26u+\frac{1}{10})}$, manifeſtum eſt celeritatem hanc fore $=0$, ſi $q=1$ maximamque ſi $q=0$ ſeu angulus RnG rectus At cum angulus RnG vltra datum limitem creſcere nequeat, intelligitur maximam fore acceſſionem ad ventum ſi angulus RnG capiatur maximus. Quamobrem obliquitas curſus tanta eſt ſumenda, vt angulus reſpondens RnG a valore ſuo maximo ſenſibiliter non diſcrepet.

Coroll. 4.

867. Si ergo angulus obliquitatis curſus, cui maximus reſpondet angulus RnG, ponatur $=\alpha$, et maximus angulus RnG $=\beta$, debebit angulus AGL aliquantulum minor accipi quam α; ita vt RnG maneat $=\beta$.

Coroll. 5.

868. Ponamus angulum AGL ipſi angulo α aequalem vel aliquantillum minorem capi, erit angulus RnG $=\beta$; vnde ob triangulum Rnv iſoſceles fiet angulus VvL $=90^\circ-\frac{1}{2}\beta$, et angulus VRA, quem plaga venti cum directione ſpinae nauis AB conſtituit erit $=90-\alpha\frac{1}{2}\beta$ grad. vel aliquanto maior. Angulus autem quo ventus in vela incidit ſeu Vre erit $=\frac{1}{2}\beta$.

Coroll. 6.

869. Hinc igitur ope tabellae ſupra datae, qua relatio inter α et β continetur, cuiusuis nauis datae curſus ita dirigi poterit, vt iter maxime aduerſus ventum inſtituatur.

Scho-

Scholion.

870. In his propositionibus assumsimus nauem iam habere eam celeritatem, qua a vento sollicitata secundum datam directionem progredi queat; neque solliciti fuimus, vnde eam celeritatem acquisiuerit. Quamobrem etiam istae proprietates, quas inuenimus locum non habent, nisi navis iam eam ipsam celeritatem, quam ipsi tribuimus aliunde sit nacta. Hae scilicet propositiones respiciunt motum vniformem, quo nauis a vento propulsa prouehi potest neque ex iis productis et acceleratio motus, si nauis vel in quiete fuerit posita, vel datam celeritatem in data directione habuerit, cognosci potest, sed istas propositiones praemitere conueniens visum est quo intelligitur, quomodo nauis, si iam quandam celeritatem sit consecuta, eam ope venti conseruare eaque in directum progredi queat. Quare cum haec satis sint explicata, inuestigabimus quomodo nauis a vento motum accipere eumque augere possit: in quo primum erit inquirendum si nauis quamcumque iam habeat celeritatem in data directione atque quamuis teneat cursus obliquitatem, quomodo datus ventus in vela vtrunque disposita irruens motum illum afficiat, eum vel augendo vel diminuendo vel directionem ipsam alterando vel denique cursus obliquitatem immutando. Deinde si hoc fuerit definitum, licebit eiusmodi quaestiones tractare, quibus pro data dispositione nauis *et* velorum totus motus requiritur, quem nauis a vento sollicitata accipiet; ex iisque demum iudicari poterit vtrum nauis eiusmodi motum, quem ipsi in his praecedentibus propositionibus iam insitum posuimus, nancisci queat, an secus? et si fieri pote-

rit vt ipſi talis motus concilietur ſimul modus conſtabit, quo eiusmodi motus ſit producendus. In nauigatione quidem praecipue motus vniformis in directum requiritur, qui ſi iam fuerit formatus, quomodo conſeruetur expoſuimus; ſed hoc nullius foret vſus, niſi conſtaret, quanam nauis directione et qua velorum diſpoſitione, ſi nauis primum quieuerit, ea ad eiusmodi motum perennem redigi queat. Deinde vero etiam noſſe oportet, quomodo ex vno motu conſtante alius quicunque datus ſit formandus, cuiusmodi quaeſtiones in nauigatione maximi ſunt momenti.

PROPOSITIO 83.

Problema.

Tab. XXXV. fig. 2.

871. *Si nauis quaecunque* AEBF *curſum teneat obliquum* AGL, *ita vt eius centrum grauitatis* G *motu progreſſiuo ſit praeditum in directione* GL. *Sollicitetur autem haec nauis a vento in directione* VL *flante et in vela* $\underline{e}\,\underline{f}$ *impingente; determinare immutationem tam motus quam obliquitatis curſus inde ortam.*

Solutio.

Sit nauis celeritas progreſſiua, quam eius centrum grauitatis G habet ſecundum directionem GL debita altitudini v ſeu $= \sqrt{v}$. Sitque anguli obliquitatis curſus AGL ſinus $= s$ et coſinus $= r$ poſito ſemper ſinu toto $= 1$. Deinde centrum grauitatis velorum in quo vis venti collecta eſt concipienda ſit in axis AB puncto $\underline{r}$ exiſtente $G\underline{r} = y$; atque velorum poſitio $\underline{e}\,\underline{f}$ cum axe AB conſtituat angulum $A\underline{r}\underline{e}$ ſeu $B\underline{r}\underline{f}$ cuius ſinus ſit $= m$ et coſinus $= n$; planities vero velorum ſit $= gg$. Denique venti celeritas ſit

=

$=\sqrt{c}$, atque anguli VrB, quem directio venti VrL cum axe nauis AB conſtituit, ſinus ſit $=\mu$ et coſinus $=\nu$. His praemiſſis vis venti habebit directionem rs normalem ad ſuperficiem velorum ef, eritque anguli Ars ſinus $=n$ et coſinus $=m$: anguli vero rsG ſinus erit $=nr-ms$, et coſinus $=ns+mr$: et anguli Vrf ſinus erit $=n\mu+m\nu$; anguli tandem Gtf, quem poſitio velorum ef cum directione motus GL conſtituit, ſinus erit $=ns+mr$; vnde quantitas vis venti erit $=((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2gg$, ſeu tanti aeris voluminis ponderi erit aequalis. Quare ſi pondus nauis ponatur $=M$, et volumen partis aquae ſubmerſae $=V$ erit ipſa vis venti $=\frac{M((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2g^2}{784\,V}$. Sit porro pro hoc curſu obliquo centrum reſiſtentiae R exiſtente $GR=z$; et RM media directio reſiſtentiae, quae cum AB angulum MRG conſtituat, cuius ſinus ſit $=\sigma$ et coſinus $=\varrho$, erit an- anguli RnG ſinus $=r\sigma-s\varrho$, et coſinus $=s\sigma+r\varrho$, reſiſtentia vero aequalis ſit illi, quam pateretur ſuperficies plana uu eadem celeritate directe contra aquam mota; ex quo vis reſiſtentiae erit $=uuv$, ſeu $=$ ponderi $\frac{Muuv}{V}$. Quamobrem nauis a duabus potentiis ſollicitabitur quarum prior ex vento orta eſt $=\frac{M((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2gg}{784\,V}$ ac nauem pellit in directione rs; poſterior vero eſt vis reſiſtentiae $=\frac{Muuv}{V}$, quae nauem vrget in directione RM. Quo nunc immutatio motus progreſſiui eruatur, vtraque vis in ipſo grauitatis centro applicata eſt cenſenda, vtraque reſoluenda in binas laterales, tangentiales ſcilicet in directione GL ſitas et normales directionem GN tenentes: prodibit autem vis vrgens centrum grauitatis

tatis G in directione G L, ſeu vis tangentialis $= \frac{M(ns+mr)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{M(s\sigma+r\rho)uuv}{V}$. At vis vrgens in directione GN ad directionem motus GL normali, ſeu vis normalis erit $= \frac{M(nr-ms)((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{M(r\sigma-s\rho)uuv}{V}$. Ponatur breuitatis gratia vis tangentialis $= T$ et vis normalis $= N$; et concipiatur centrum grauitatis G ſua celeritate $\sqrt{v}$ progredi per ſpatiolum $Gg = dx$, accelerabitur interea ita vt ſit $dv = \frac{Tdx}{M}$. Simul vero a vi normali N cogetur viam rectilineam deſerere, atque lineam Ggl convexam verſus GL deſcribere, cuius in G radius curuaturae GN erit $= \frac{2Mv}{N}$; ſeu dum elementum $Gg = dx$ percurrit deflectet a curſu GL verſus l angulo $= \frac{Ndx}{2Mv}$. Vtraque praeterea vis, ſiquidem neutrius directio per centrum grauitatis G tranſit, conuertere conabitur nauem circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, et vis venti quidem proram A verſus a rotari coget, eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2 y}{784\, V}$. Vis reſiſtentiae contra conuerſionem in plagam oppoſitam producet, proramque A verſus α rotabit eiusque momentum ad hunc effectum erit $= \frac{M\sigma uuvz}{V}$; ex quo conficietur momentum virium ad proram A verſus a conuertendam $= \frac{Mn((n\mu+m\nu)\sqrt{c}-(ns+mr)\sqrt{v})^2 g^2 y}{784\, V} - \frac{M\sigma u^2 vz}{V}$ quae quantitas ſi fuerit negatiua, prora in plagam $A\alpha$ circa G agetur Q. E. I.

Coroll. 1.

872. Si ergo ope gubernaculi impedienda ſit conuerſio nauis circa axem verticalem, tanta vis a gubernaculo exerceri debet, cuius momentum reſpectu eiusdem axis

axis verticalis aequale ſit et contrarium illi momento ex vi venti et reſiſtentia orto.

Coroll. 2.

873. Si tam centrum virium a vento exceptarum $\underline{r}$ quam centrum reſiſtentiae R in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis G tranſeuntem incidat, tum vis gyratoria prorſus euaneſcit, nullaque vi opus eſt gubernaculi ad directionem AB conſeruandam.

Coroll. 3.

874. Niſi autem tam $\underline{y}$ quam $\underline{z}$ euaneſcat, perſpicuum eſt directionem AB ſine actione gubernaculi conſeruari non poſſe. Nam etiamſi illius momentum fieri poſſit $= 0$, tamen mutata celeritate, id ceſſabit eſſe $= 0$.

Coroll. 4.

875. Si celeritas nauis in G ponatur $= 0$, tum reſiſtentia euaneſcet, atque ventus motum naui imprimet in directione rs: quae cum nunquam cum directione venti Vr angulum acutum conficere poſſit, initium motus non aduerſus ventum inſtitui poterit.

Coroll. 5.

876. Si autem nauis habeat motum in directione GL celeritate $\mathrm{V}v$, directio motus conſeruabitur, ſi vis normalis N euaneſcit, hoc eſt ſi fuerit $((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + mr)\sqrt{v})^2 g^2 = \frac{784(r\sigma - s\rho)uuv}{nr - ms}$. Si autem illa quantitas maior fuerit quam haec, tum angulus $\mathrm{VL}\lambda$ fiet maior,

contra vero ſi illa quantitas minor fuerit quam haec, angulus VLλ minor euadet.

Coroll. 6.

877. Niſi ergo talis motus nauis ſit producendus cuius directio GLλ cum directione venti VL conſtituat angulum VLl vel rectum vel acutum, eiusmodi motus facile producetur, efficiendo vt prima motus directio rs fiat in data directione, id quod fieri poteſt, atque tum vt vis normalis euaneſcat; quod fiet curſum directum inſtituendo.

Coroll. 7.

878. At ſi motus deſideretur aduerſus ventum, ita vt angulus VLλ fiat acutus id initio motus obtineti nequit. Quare poſt initium curſus ita dirigi debet vt ſit perpetuo 784 $(r\sigma - s\varrho)u^2v > (nr - ms)((n\mu + m\nu)\sqrt{c} - (ns + m\nu)\sqrt{v})^2g^2$. Hoc autem commodiſſime obtinebitur, ſi ſaltem circa motus initium vela ef teneantur normalia ad curſum praeſentem GL, vel etiam reclinantia vt angulus rtL fiat obtuſus. Quando vero iam aliquam celeritatem acquiſiuerit nauis, tum vela pedetentim in eum ſitum diſponi poterunt, qui ad motum aequabilem requiritur.

Coroll. 8.

879. In hoc autem curſu, qui aduerſus ventum inſtitui debet, probe notandum eſt, directionem prorae GA perpetuo intra directiones VL et Lλ eſſe conſeruandam, hincque curſum obliquum eſſe tenendum, quo angulus RnG fiat maximus.

Co-

Coroll. 9.

880 Si ponatur anguli Vrf sinus $= \zeta$; seu $n\mu + m\nu = \zeta$ atque anguli rtL sinus $= \eta$ et cosinus $= \theta$, ita vt sit $\eta = ns + mr$ et $\theta = nr - ms$; itemque anguli RnG sinus $= p = r\sigma - s\varrho$ et cosinus $= q = s\sigma + r\varrho$; erit vis tangentialis accelerans $T = \frac{M\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mqu^2 v}{V}$ et vis normalis cursum GL versus l deflectens $N = \frac{M\theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2}{784\, V} - \frac{Mpu^2 v}{V}$.

Coroll. 10.

881. Quo igitur cursus nauis aduersus ventum quantum fieri potest dirigatur, oportet vt sit, quemadmodum iam monstrauimus $784 pu^2 v > \theta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 g^2$; simulque vt motus acceleretur debet esse $\eta(\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v})^2 p^2 > 784\, qu^2 v$: ex quibus multo magis esse debet $p\eta > q\theta$ seu ang. $RnG > rsG$. siue angulus Rzr debet esse acutus.

Coroll. 11.

882. Debebit igitur praeter angulum Rzr acutum quoque esse $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} < \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{pv}{\theta}}$; simulque $\zeta\sqrt{c} - \eta\sqrt{v} > \frac{28u}{g}\sqrt{\frac{qv}{\eta}}$. Vtrique autem conditioni maxime satisfit si cursus obliquitas ea accipiatur, cui respondet maximus angulus RnG, tum enim p maximum, q vero minimum obtinet valorem.

Scholion

883. Pendet igitur cognitio motus, quem datus ventus datae naui dato modo directae praeter celeritatem venti, velorum quantitatem atque resistentiam praecipue a duobus angulis, primo scilicet ab angulo Vrf quem venti

directio cum positione velorum $e\,f$ constituit, secundo ab angulo rtL, quem directio velorum $\underline{e}\ \underline{f}$ cum directione motus GL facit, quorum angulorum differentia est obliquitas cursus AGL, qua directio resistentiae nRM seu angulus RnG determinatur. Prouti igitur in cursu hi anguli manent constantes, vel alteruter, vel vterque variabilis existit, nauis aliam viam describet aliamque in singulis locis habebit celeritatem. Maxime autem difficile erit motum definire si angulus obliquitatis cursus AGL fuerit variabilis, cum ab eius variatione non solum angulus RnG immutetur, sed etiam ipsa resistentiae quantitas absoluta quae per $\underline{u}\ \underline{u}$ exprimetur, quorum vtrumque difficile est assignare, quomodo mutata obliquitate cursus vel augeatur vel diminuatur. Ceterum intelligitur quantum expediat naues ita construere, vt centrum resistentiae pro quaque cursus obliquitate in rectam verticalem per centrum grauitatis transeuntem incidat, hoc enim si fuerit praestitum, atque insuper vela in malis ita disponantur, vt media directio vis, quam recipiunt in eandem verticalem cadat, non solum gubernaculi actio tantopere desiderabitur, sed etiam leui vi gubernaculum dirigetur, cum nunquam eiusmodi vis occurrat quae nauem conuertere conetur. Praeterea vero etiamsi accidat vt centra, tum resistentiae tum vis venti non praecise in eum locum cadant, tamen dummodo discrimen satis fuerit exiguum, ope gubernaculi cursus quicunque instituetur. Quanquam enim gubernaculum aliam vim sensibilem non exerit, praeter conuersionem nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis transeuntem, tamen ope gubernaculi directio motus vehementer immutatur. Dum enim ope gubernaculi cursus obliquitas muta-

mutatur, ſimul media directio reſiſtentiae in aliam plagam conuertitur, quo fit vt ipſa motus directio mox declinetur. Ita actione gubernaculi non ſolum poſitio nauis ſeu axis eius longitudinalis a puppi ad proram ducti afficitur, ſed etiam ipſa directio motus in eam plagam, in quam prora dirigitur, deflectitur ſiquidem naues directe progredientes valde exiguam patiuntur reſiſtentiam reſpectu eius quam ſufferunt, ſi curſu obliquo feruntur. Hancob-cauſam gubernaculi actio maxime requiretur, ſi curſus quantum fieri poteſt, ſit contra directionem venti inſtituendus, ope gubernaculi enim efficiendum eſt, vt ea curſus obliquitas conſeruetur, cui maximus angulus R*n*G reſpondeat. Deinde vt motus nauis ſimul maxime acceleretur, atque aduerſus plagam ex qua ventus venit, inflectatur, vela ita ſunt continuo diſponenda, vt angulus $r\underline{t}\underline{s}$ tantus conſeruetur, quantum reliquae circumſtantiae permittunt; quo maior enim eſt angulus rts eo maior erit eius ſinus η contraque eo minor eius coſinus θ, ex quo tum acceleratio maxima obtinebitur, tum etiam maxima curſus declinatio aduerſus ventum. At ſi curſus iam angulum acutum conſtituat cum directione venti, tum vtique angulum $\underline{r}\underline{t}\underline{s}$ magis acutum eſſe oportebit, quoniam alioquin ventus vela non impelleret. Quo circa perpetuo efſici debebit, vt angulus V*re* tam ſit acutus, quam quantitas vis venti permittit. Cum autem celeritas iam erit facta aequabilis, tum ea curſus directio inſtituenda eſt, quae ſupra pro motu aequabili eſt monſtrata.

PRO-

PROPOSITIO 84.
Problema.

Tab. XXXVI fig. 1.

884. *Si nauis* AEBF *oblique moueatur in fluuio, cuius curſus ſit* CGD, *ita vt axis nauis* AB *cum directione fluuii* CD *conſtituat angulum obliquum* AGC; *determinare motus mutationem a vi fluuii ortam.*

Solutio.

Sit fluuii celeritas debita altitudini k atque anguli AGC quem axis ſeu ſpina nauis AB cum curſu fluuii CD facit ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$; habeat autem nauis iam motum quo eius centrum grauitatis G celeritate altitudini v debita progrediatur in directione GL quae cum curſu fluminis GD conſtituat angulum LGD cuius ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$. Iam vt alliſio aquae ad ſuperficiem nauis reperiatur, concipiatur totum ſyſtema ex fluuio et naui compoſitum celeritate $\sqrt{v}$ promoueri in directionem ipſi GL contrariam, quo fiet vt fluuius in nauem quiescentem impingat. Sumta ergo GC $= \sqrt{k}$, et GL $= \sqrt{v}$, compleatur parallelogrammum GCKL, atque diagonalis GK repraeſentabit tum directionem quam celeritatem, qua fluuius in nauem quiescentem allidere eſt concipiendus. In triangulo autem GCK datur angulus C, cuius ſinus $= m$ et coſinus $= n$, atque ambo latera CK $= \sqrt{v}$ et CG $= \sqrt{k}$, ex quibus oritur celeritas fluuii in directione IG incurrentis $= \sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}$, atque anguli CGI ſinus $= \frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$, eiusque coſinus $= \frac{\sqrt{k} - n\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$, ex quibus angulus AGI innoteſcit; erit autem anguli AGI ſinus $= \frac{\mu\sqrt{k} - (\mu n + \nu m)\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$, eiusque coſinus $= \frac{\nu\sqrt{k} + (\mu m - \nu n)\sqrt{v}}{\sqrt{(k - 2n\sqrt{kv} + v)}}$. Concipiatur

piatur nunc nauis in directione GI in aqua quiescente promoueri, ſit R centrum reſiſtentiae, et Rm media directio reſiſtentiae, atque reſiſtentia ipſa ſit tanta, quantam pateretur figura plana $\underline{u}\ \underline{u}$ eadem celeritate contra aquam mota: His poſitis nauis ab allapſu fluuii vrgebitur in directione RM, vi, quae aequalis eſt ponderi voluminis aquae $= (k - 2n\sqrt{kv} + v)u^2$, ſeu poſito pondere nauis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$ erit vis fluuii allidentis $= \frac{M(k-2n\sqrt{kv}+v)u^2}{V}$, qua vi nauis ſecundum directionem RM propelletur. Haec igitur vis reſoluta in binas, quarum altera in GL incidit, altera ad GL eſt normalis, dabit cum vim tangentialem, qua motus in directione GL accelerabitur, tum vim normalem, qua motus directio deflectetur aGL verſus GD. Denique niſi punctum R, quod eſt centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGI in G incidat nauis ſimul circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum conuertetur et quidem in plagam AEL ſi R inter A et G fuerit ſitum, in plagam contrariam vero ſi punctum R intra B et G cadat; ſi quidem angulus CGI fuerit minor angulo AGC; nam ſi angulus CGI maior foret angulo AGC haec omnia contra ſe haberent. Q. E. I.

Coroll. 1.

885. Si nauis vel quieſcat vel motum habeat ſecundum directionem fluminis GD tum angulus CGI euaneſcet, atque R erit centrum reſiſtentiae reſpondens obliquitati curſus AGC. Vis conuertens, igitur tendet ad obliquitatem AGC augendam, ſi R intra puncta A et G cadat, contra vero axem AB ſecundum curſus fluminis directionem CD diſponet, ſi R intra G et B cadat.

Co-

Coroll. 2.

886. Si ergo nauis initio directe ſecundum curſus fluminis directionem CD fuerit diſpoſita, eaque aliquantillum declinetur, ſponte ſitum priſtinum recipiet, ſi centrum reſiſtentiae R intra puncta G et B cadat. Econtrario autem ſi R intra G et A fuerit ſitum, directio AB continuo magis a curſu fluminis CD declinabitur.

Coroll. 3.

887. Si igitur pars impulſui fluuii expoſita EAF fuerit ſatis ponderoſa, magnamque vim a fluuio patiatur, tum nauis ſeu corpus quodcunque per fluuium recta deſcendere poterit, quia hoc caſu punctum G ad A accedit, punctum R vero recedit.

Coroll. 4.

888. At ſi pars EAF fuerit perquam acuta et leuis, ita vt centrum reſiſtentiae R prope ad A collocetur, tum difficulter nauis directe per fluuium deſcendet, ſed a minima vi de directione CD depulſa, magis a ſitu directo elongabitur.

Coroll. 5.

889. Eodem vero caſu, quo motus nauis GL incidit in curſum fluuii CD, quoniam angulus GRM maior erit angulo AGC, nauis a ſua directione depelletur, atque ad ripam fluuii, in quam pro A declinat pelletur.

Coroll. 6.

890. Ponamus igitur nauem iam motum accepiſſe verſus ripam in directione GL, atque angulum AGC con-

conseruari; accelerabitur iste motus, siquidem angulus $L r M$ fuerit acutus, simul vero de hac directione deflectetur, versus GD, siquidem angulus LGD maior fuerit quam MRG.

Scholion.

891. Apparet igitur motum corporum a fluuio abreptorum maxime esse irregularem, etiamsi ea plano diametrali verticali sint praedita atque duas partes similes et aequales vtrinque habeant. Primo enim nisi axis AB in ipsam fluuii directionem incidat, corpus versus eam ripam pellitur, in quam prora A vergit, (conuenit enim eam nauis partem, quae cum aqua conflictatur proram appellari); Deinde variis modis corpus ab aqua circa axem verticalem per centrum grauitatis ductum circumagetur, pro diuerso situ centri resistentiae R, quod durante rotatione continuo locum mutat, nisi pro omni obliquitate sit fixum. Tertio ob vim normalem ad motus directionem GL a vi fluuii ortam, ipsa motus directio afficitur eaque vel magis declinatur a cursu fluminis vel ad eum reducetur, prout angulus MRG vel maior fuerit vel minor LGD. At vero etiamsi motus versus fluuii cursum inflectatur, tamen eo recidere nequit, quia minuto angulo LGD eousque vt minor fieret quam MRG, deflexio orietur. Denique tametsi semel directio GL parallela foret directioni RM, quo casu vis normalis euanesceret, tamen ob corporis conuersionem vel a vi aquae, vel ab alia leuissima causa ortam, statim alia media directio vis aquae aderit, quae motum turbabit. Interim tamen eiusmodi nauis, in qua centrum resistentiae versus puppim B cadit

 dire-

directe a fluuio abripietur, si quidem cursu directo motum inceperit. Corpora autem irregularia, quae nequidem duabus partibus aequalibus et similibus gaudent motu maxime irregulari ferri oportet, ex quo mox ad ripam alterutram deuoluentur. Quod autem ad naues attinet, ope gubernaculi in B applicati motus regularis facile obtinebitur, atque cursus vel secundum flumen directe deorsum vel ad ripam institui poterit; semper autem motus descensus praeualebit, ex quo fluuius in directione, ad ipsius cursum normali traiici omnino non potest; sed nauis inter traiectum eo magis deorsum abripietur quo celerior fuerit fluminis cursus. Cum vi fluuii nunc alia vis sollicitans vel remorum vel venti coniungi posset, atque determinari, quomodo quisque intentus cursus quam commodissime sit instituendus, sed cum haec propius ad alterum librum respiciant, in quo nauigationem nauiumque dispositionem ex professo pertractare est constitutum, hic plura afferre de istiusmodi motibus non est visum, praesertim cum facile sit ex methodo tradita huiusmodi quaestiones, quae proponi queant, ad calculum reuocare atque resoluere. Superest igitur vt paucis exponamus motum nauium quae non sunt liberae, sed alicubi alligatae, quae doctrina in traiectu fluuiorum sine vi aliena praecipue est vtilis.

PROPOSITIO 85.
Problema.

Tab. XXXVI. fig. 2.

892. *Si nauis* AD *in fluuio secundum directionem* Z V *fluente, ope funis* IZ *puncto firmo* Z *ita fuerit alligata, vt perpetuo respectu funis* IZ *eandem positionem teneat, id* quod

quod factum concipiatur per funem BO, *punctum nauis* B *cum* O *connectentem*; *determinare motum, quem cursus fluminis isti naui imprimet.*

Solutio.

Ponemus ante omnia partem nauis aquae submersam esse parallelepipedum, quia alioquin vires quas fluuius in diversis positionibus exerit, difficulter inter se comparari possent. Sit itaque ABDC sectio aquae quae erit rectangulum, cuius latus AB sit $= a$, latus AC $= b$, et profunditas nauis in aqua $= c$, erit superficies in AB vim fluuii excipiens $= ac$, et superficies sub AC infra aquam versans $= bc$. Sit porro fluuii celeritas debita altitudini k atque longitudo funis ZI $= f$, quae vehementer magna sit respectu quantitatum a, b, et c; sitque anguli ZIA sinus $= m$ et cosinus $= n$. Quod nunc ad motum huius nauis attinet, intelligitur nauem alium motum habere non posse praeter gyratorium circa punctum Z, quo punctum I in arcu circulari PVQ, cuius centrum est Z; feretur. Ponamus autem nauem motum in P inchoasse, atque percurrendo arcum PVQ peruenisse in situm ABDC, in quo punctum I celeritatem habeat altitudini v debitam, qua conabitur per arcum IVQ progredi. Ponatur insuper anguli IZV, quem positio funis IZ cum directione fluuii ZV constituit, sinus $= x$ et cosinus $= y$. His praemissis consideremus vim fluuii, quam in nauem exercebit. Ac primo quidem irruet in latus AB cuius area est $= ac$ in directione ME sub angulo MEA $=$ ZIA $+$ IZV, cuius anguli igitur sinus erit $= my + nx$, cosinus vero $= ny - mx$ qui cosinus simul est sinus anguli NHI sub quo fluuius in

latus AC impingit. Iam ſi nauis quieſceret, vis fluuii ſponte haberetur, at cum nauis iam motum habere ponatur, reperietur vis, quam fluuius in latus AB $= ac$ exeret, in directione EF normali ad AB in eius puncto medio E, $= ac((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2$: vis vero quam lateri AC imprimet in directione HG ſimili modo erit $= bc((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$. Poſito autem pondere nauis $=$ M et volumine partis ſubmerſae $=$ V, expreſſiones inuentae, ſi per $\frac{M}{V}$ multiplicentur, dabunt pondera his viribus aequiualentia. Hinc igitur orietur momentum harum duarum virium coniunctim ad nauem circa polum Z circumagendam in plagam IVQ $= \frac{Macnf}{V}((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcmf}{V}((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$, quod diuiſum per momentum ipſius nauis reſpectu poli Z, quod ob longitudinem f maximam eſt $= Mff$ dabit vim gyratoriam. Ponamus ergo nauem per elementum arcus ds verſus V progredi, erit $ds = \frac{-fdx}{y}$; atque interea ita motus accelerabitur vt ſit $V\,dv = \frac{-nacdx}{y}((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2 + \frac{mbcdx}{y}((ny-mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$. Ad motum autem ipſum cognoſcendum ſufficit aduertiſſe conuerſionem in plagam VQ continuare quamdiu fuerit $ank(my+nx)^2 > bmk(ny-mx)^2$ ſeu tangens ang. MEA $> \sqrt{\frac{bm}{an}}$; qui terminus oritur ſi ponatur $v = 0$. Nam ſi nauis habet motum in directione IV, eo progredietur ſiue accelerato ſiue retardato; ſin autem alicubi quiescat, tum vi fluuii propelletur in eandem directionem a P ad Q. Si igitur vbique inter P et Q fuerit tang. MEA $> \sqrt{\frac{bm}{an}}$, tum nauis ex P egreſſa ad Q vsque pertinget, quae omnia abunde ſufficiunt ad motum cognoſcendum. Q. E. I.

Co-

Coroll. 1.

893. Si nauis perueniat vltra V in situm $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}\ \overline{c}$ omnia manebunt vt ante, praeterquam quod anguli VZi sinus poni debeat $= -x$. Ita vis nauem in i vlterius versus Q vrgens erit vt $an((my-nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2-bm((ny+mx)\sqrt{k}+m\sqrt{v})^2$.

Coroll. 2.

894. Motum ergo hunc vltra V versus Q continuabit, quoad fuerit $na(my-nx)^2 > mb(ny+mx)^2$ seu tang. $\overline{m}\ \overline{e}\ \overline{a} > \sqrt{\frac{mb}{na}}$. Sit angulus cuius tangens est $\sqrt{\frac{mb}{na}}$, $= \alpha$, fiet $m\ \overline{e}\ \overline{a} > \alpha$ seu $ZIA - VZi > \alpha$. Quo igitur nauis ad Q vsque peruenire queat, oportet vt angulus VZQ non maior sit quam $ZIA - \alpha$.

Coroll. 3.

895. Si ponamus porro motum nauis circa polum Z in P inchoasse, quo eiusmodi motus per V ad Q vsque continuetur necesse est vt sit $PZV + ZIA > \alpha$, denotante α angulum cuius tangens est $\sqrt{\frac{mb}{na}}$: nisi enim hoc fuerit, motus nequidem incipere poterit; hic autem omnes angulos ponimus acutos, alias tangentes accipere oportet.

Coroll. 4.

896. Si recta ZV per medium fluuium transeat, atque requiratur vt nauis ita a ripa P sponte ad ripam Q fluuium transeundo appellat, oportebit vt sit ang. VZQ = ang. ZIA − ang. α. Si enim ang. VZQ minor foret, tum nauis ad Q ingenti vi appelleret, quod est euitandum.

Coroll. 5.

897. Si ergo detur fluuii latitudo PQ, atque tam ipſa ſpecies nauis, quam angulus AIZ, ex illa aequalitate inuenta reperietur longitudo funis ZV ad traiectum requiſita, indeque punctum Z in medio flumine accipiendum cui nauis eſt alliganda.

Coroll. 6.

898. Si ponatur ſemiſſis latitudinis fluuii $PS = QS = b$: et interuallum $ZS = z$, angulique QZV ſinus x, coſinus y, erit $\frac{b}{z} = \frac{x}{y}$. cum igitur ſit $\sqrt{\frac{mb}{na}} = \frac{my - nx}{ny + mx}$; erit $mz\sqrt{na} - nb\sqrt{na} = nz\sqrt{mb} + mb\sqrt{mb}$, hincque $ZS = z = \frac{b(n\sqrt{na} + m\sqrt{mb})}{m\sqrt{na} - n\sqrt{mb}}$; ac longitudo funis $ZV = f = \frac{b\sqrt{(na + mb)}}{m\sqrt{na} - n\sqrt{mb}}$.

Coroll. 7.

899. Perſpicuum autem eſt ante omnia eſſe debere $m\sqrt{na} > n\sqrt{mb}$, ſeu $\frac{a}{b} > \frac{n}{m}$ ſiue $\frac{b}{a} < \frac{m}{n}$. Ducta ergo in rectangulo ABDC diagonali BC angulus ZIA maior eſſe debebit quam angulus ABC. Ceterum perinde eſt in quonam puncto rectae AB funis alligetur.

Coroll. 8.

900. Quo nauis ceteris paribus celerrime a ripa P ad ripam Q pertingat, efficiendum eſt vt acceleratio in puncto medio V fiat maxima. At ſi nauis in V quieſceret, foret vis eam verſus Q pellens vt $m^2na - mn^2b$, quae quantitas fit maxima ſi poſito $\frac{m}{n} = t$ fuerit $at^3 - 2bt^2 - 2at + b = 0$

Co-

Coroll. 9.

901. Quoniam autem longitudo nauis a multum excedit latitudinem b, erit circiter $t = \frac{m}{n} = \sqrt{2} + \frac{3b}{4a}$. Hancobrem expediet angulum AIZ accipere 60° circiter, si quidem propemodum latitudo b fuerit triens vel quadrans longitudinis a. Hocque ipso multum excedet angulus AIZ angulum ABC.

Coroll. 10.

902. Si figura nauis fuerit quadrata vt sit $b = a$, fiet $t = \frac{m}{n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ seu angulus AIZ erit 69°, 6′; vnde fit $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ et $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$. Hincque porro prodit longitudo funis $= f = b\sqrt{(15+6\sqrt{5})} = 5,331b$. angulusque VZQ fit 10°, 48′.

Coroll. 11.

903. Si angulus AIZ seu eius tangens t detur, reperietur commodissima ratio longitudinis nauis a ad latitudinem b, ex hac aequatione $\frac{b}{a} = \frac{t^3-2t}{2tt-1}$: ex qua intelligitur necessario esse debere $tt > 2$ seu angulum AIZ maiorem quam 54°, 45′, fit autem sponte $t > \frac{b}{a}$ vti requiritur. Erit vero $f = \frac{b(1+tt)\sqrt{(tt-1)}}{t\sqrt{(2tt-1)}-t\sqrt{(tt-2)}}$.

Coroll. 12.

904. Si constituatur angulus AIZ sexaginta graduum seu $t = \sqrt{3}$, satis commoda figura nauis prodibit, orietur enim $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ seu b ad a vt 53 ad 153 proxime. Deinde longitudo funis ZV reperietur $= f = \frac{4b\sqrt{2}}{\sqrt{15}-\sqrt{8}}$

=

$= \frac{b(\surd + 1)\surd 2}{\surd 3}$ seu proxime $f = 2,64222\, b$ siue $\frac{f}{b} = \frac{87}{14}$. Angulus vero PZQ erit 44°, 28′.

Scholion.

905. Modus hic fluuium fine remis et velis traiiciendi admodum est commodus et ad vsum accommodatus, cum facile sit eas conditiones adimplere, quibus traiectio non solum possibilis, sed etiam celerrima reddatur. Imprimis autem commendandus est casus in vltimo corollario erutus, pro quo funis non adeo longus requiritur atque proportio inter longitudinem nauis $AB = a$ et latitudinem $AC = b$, valde commode reperta est; fere scilicet longitudo tripla prodiit latitudinis. Facile autem perspicitur cum traiectus a ripa P vsque ad ripam Q fuerit peractus, quomodo vicissim a Q ad P cursus sit instituendus; funes scilicet ZI et OB in altero latere CD affigendi. Verum quo haec transmutatio facilius fieri queat, expediet punctum I in ipso puncto H assumere quo obtinebitur, vt in reditu non opus sit hunc funem deligari alioque loco firmare; perinde enim est quo loco I capiatur. Deinde notandum est funem BO tam longum esse accipiendum, vt angulus quem directio funis ZI cum KH producta constituet sit 60 graduum. Punctum O autem neque nimis propinquum puncto I neque nimis ab eo remotum accipi debet, ne minima funis OB elongatione angulus AIZ notabiliter diminuatur; minime autem angulus AIZ immutabitur si capiatur $OI = IB$. Denique etiamsi elongatione funis BO angulus AIZ quantitatem assignatam ammittat, tamen statim remedium afferri poterit

de

de quo non opus est plura monere. Progredior itaque ad motum nauium in fluuio determinandum, quae quidem vt ante circa punctum fixum sunt mobiles, sed positionem suam respectu funis non tenent constantem; scilicet mobiles eas ponam circa ambo puncta Z et I libere.

PROPOSITIO 86.

Problema.

906. *Si nauis ABDC in fluuio ope funis IZ ita puncto fixo Z sit alligata, vt non solum circa punctum Z sed etiam circa punctum I in quo funis naui est annexus, sit mobilis; determinare motum huius nauis ab allisione fluuii oriundum.*

T. XXXVII. fig. 1.

Solutio.

Repraesentet recta ZV directionem fluuii, sitque celeritas fluuii debita altitudini k: naui vero iterum tribuamus figuram vt ante cuius sectio quaeuis horizontalis sit parallelogrammum rectangulum ABDC: Sitque longitudo $AB = a$, latitudo $AC = b$, et profunditas sub aqua $= c$. Punctum I vero, in quo funis naui est affixus sit in latere AB, ponaturque $EI = i$. Versetur nunc nauis in situ ABDC, quo anguli AIZ sinus sit $= m$ cosinus $= n$, hicque motum habeat progrediendi per arcum IVQ centro Z descriptum, cuius radius seu longitudo funis IZ sit $= f$; angulique IZV, quem directio funis cum cursu fluminis constituit sinus sit $= x$, cosinusque $= y$, ac celeritas puncti I debita sit altitudini v. His praemissis erit ex solutione praecedentis problematis vis quam fluuius lateri AB in directione EF imprimit $= \frac{ac((my+nx)\sqrt{k}-n\sqrt{v})^2}{kkk}$ vis vero, quam latus

latus AC in directione HK excipiet, erit $= bc((ny + mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Nunc cum nauis ſit mobilis circa punctum I, nauis eiusmodi ſitum acceperit neceſſe eſt, quo momenta virium reſpectu puncti I ſeſe deſtruant. Eſt vero momentum prioris vis reſpectu puncti I $= aci((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$, et momentum alterius contrarie agens $= \frac{bbc}{2}((ny - mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$. Quamobrem habebitur iſta aequatio $\frac{(my+nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v}}{(ny-mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v}} = \frac{b}{\sqrt{2ai}}$, ex qua aequatione valor ipſarum m et n indeque angulus AIZ, ad quem nauis ſponte ſe compoſuit. Momentum porro harum virium ad nauem circa polum Z conuertendam per arcum IVQ erit vt ante $= \frac{Macfn}{V}((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 - \frac{Mbcfm}{V}((ny - mx)\sqrt{k} + m\sqrt{v})^2$ poſito pondere nauis $= M$ et volumine partis ſubmerſae $= V$. Per priorem vero conditionem haec formula ſimplicior euadit, proditque ob $V = abc$ momentum conuerſionis circa $Z = \frac{MF}{bb}(bn - 2im)((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2$; quamdiu igitur erit $bn > 2im$ conuerſio ſecudum IVQ accelerabitur. At prior aequatio euoluta dat $m = \frac{by\sqrt{k} - x\sqrt{2aik} + \sqrt{2aiv}}{\sqrt{(b^2 + 2ai)(k - 2x\sqrt{kv} + v)}}$ atque $n = \frac{-y\sqrt{2aik} + bx\sqrt{k} - b\sqrt{v}}{\sqrt{(b^2 + 2ai)(k - 2x\sqrt{kv} + v)}}$. Ex his fit $((my + nx)\sqrt{k} - n\sqrt{v})^2 = \frac{bb(k - 2x\sqrt{kv} + v)}{b^2 + 2ai}$; atque $bn - 2im = \frac{(b^2 + 2i\sqrt{2ai})(x\sqrt{k} - \sqrt{v}) + by(\sqrt{2ai} - 2i)\sqrt{k}}{\sqrt{(b^2 + 2ai)(k - 2x\sqrt{kv} + v)}}$. Nauis igitur tamdiu in arcu IVQ progredi perget quoad fuerit $b^2x + 2ix\sqrt{2ai} + by\sqrt{2ai}\,2biy > 0$, id quod per ſe ita ſe habet, antequam nauis ad V pertingit. At cum vltra medium fluvii erit progreſſa, perueneritque in ſitum $abdc$, anguli VZi ſinus erit negatiuus; Quare ſi ponatur etiam anguli VZi ſinus $= x$ et coſinus $= y$, nauis in arcu VQ eousque progredietur, quoad fuerit $by\sqrt{2ai} - 2biy > b^2x +$

2ix

$2ix\sqrt{2ai}$: Vltimus igitur terminus erit punctum Q, existente anguli QZV tangente $= \frac{b\sqrt{2ai} - 2bi}{b^2 + 2i\sqrt{2ai}}$: siue angulus QZV erit excessus duorum angulorum, quorum maioris tangens est $\frac{b}{2i}$ minoris vero tangens $= \frac{b}{\sqrt{2ai}}$; quae ad motum cognoscendum sufficiunt. Q. E. I.

Coroll. 1.

907. Si punctum I in ipso puncto A capiatur ita vt sit $i = \frac{a}{2}$, nauis e puncto P egressa non vltra punctum V pertinget; fiet enim hoc casu anguli QZV tangens $= 0$.

Coroll 2.

908. Simili modo nauis non vltra punctum V progredietur, si fuerit $i = 0$, seu si punctum I in quo funis alligatur in puncto medio lateris AB capiatur: ex quo manifestum est dari punctum I inter A et E e quo nauis funi alligata vltra V maxime progrediatur.

Coroll. 3.

909. Si autem quaeratur locus puncti I, quo angulus VZQ fiat maximus, reperitur ista aequatio $(bb + 4ii)\sqrt{a} = (2bb + 4ai)\sqrt{2i}$ seu haec $16ai^4 - 32a^2i^3 - 24ab^2i^2 - 8b^4i + ab^4 = 0$ quae dat $b^2 = \frac{12ai^2 \pm 4i(2i - a)\sqrt{2ai}}{a - 8i}$; debet igitur esse $a > 8i$ seu $EI < \frac{1}{8} AB$.

Coroll. 4.

910. Si sumatur $a = 18i$ fiet $b^2 = \frac{648}{10} i^2$ seu $b = \frac{18i}{\sqrt{5}} = 8,05i$ vnde fit $a : b = \sqrt{5} : 1$: et $EI = \frac{1}{9} AE$, hincque anguli VIQ prodit tangens $= \frac{3\sqrt{5}}{10}$, seu angulus VZQ erit $22°, 45$: vnde ex data fluuii latitudine longitudo funis determinabitur.

Coroll. 5.

911. Quo minor accipitur EI pars ipſius AB eo minor prodit latitudo nauis AC; atque ſi punctum I prorſus in E incidat, tum latitudo AC omnino euaneſcet. Omnia igitur puncta I quibus nauis vltra V progredi poterit, continentur inter E et punctum quoddam intra E et A ſitum cuius diſtantia ab E eſt octaua pars longitudinis AB.

Scholion.

912. Hoc igitur etiam modo ſine remis et velis traiectus per fluuium inſtitui poterit; at ingentem cautionem adhiberi oportet tam in figura nauis idonea eligenda quam in punctis Z et I inueniendis, in quibus funis ZI eſt firmandus. Ponamus enim eiusmodi nauem, eligi cuius longitudo AB ſe habeat ad latitudinem vt $\sqrt{5}$ ad I, punctum I in quo funis alligari debet, ita aſſumendum erit vt diſtet a puncto medio E longitudinis AB interuallo AI $= \frac{1}{18}$ AB. Deinde ſi ponatur latitudo fluuii PQ $= 2b$ haec latitudo biſecari debet in S vt ſit PS $=$ QS $= b$; anchoraque in Z firmanda eſt, vt ZS ſit perpendicularis ad PQ, atque interuallum ZS tantum accipi oportet vt angulus SZP ſeu SZQ fiat $22°, 45'$. Erit igitur ZS $= b.\,2,3847 = \frac{31}{13}\,b$ proxime; atque longituto funis ZP $= b.\,2,5859 = \frac{75}{29}\,b$ proxime. Abſoluto autem tranſitu per fluuium ex P in Q contra ex Q in P peruenietur, alligando funem in lateris CD puncto e regione ſito inter C et F quod ab F diſtet interuallo $= \frac{1}{18}$ CD. Hicque modus praxi videtur eſſe conuenientiſſimus.

Index Capitum

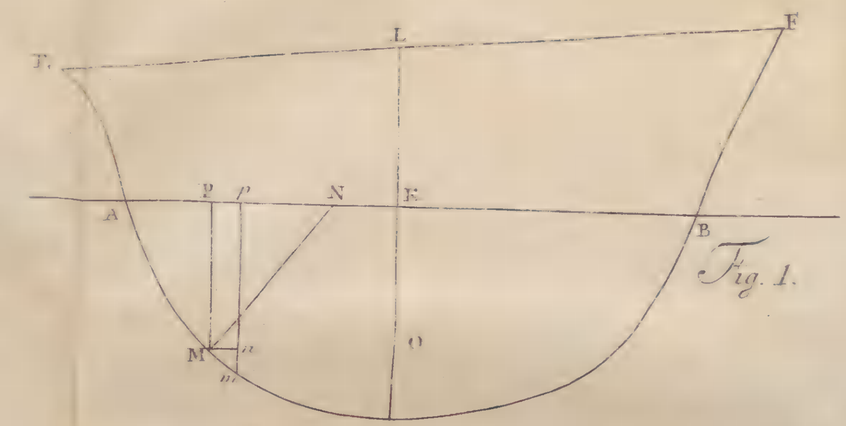


Fig. 1.

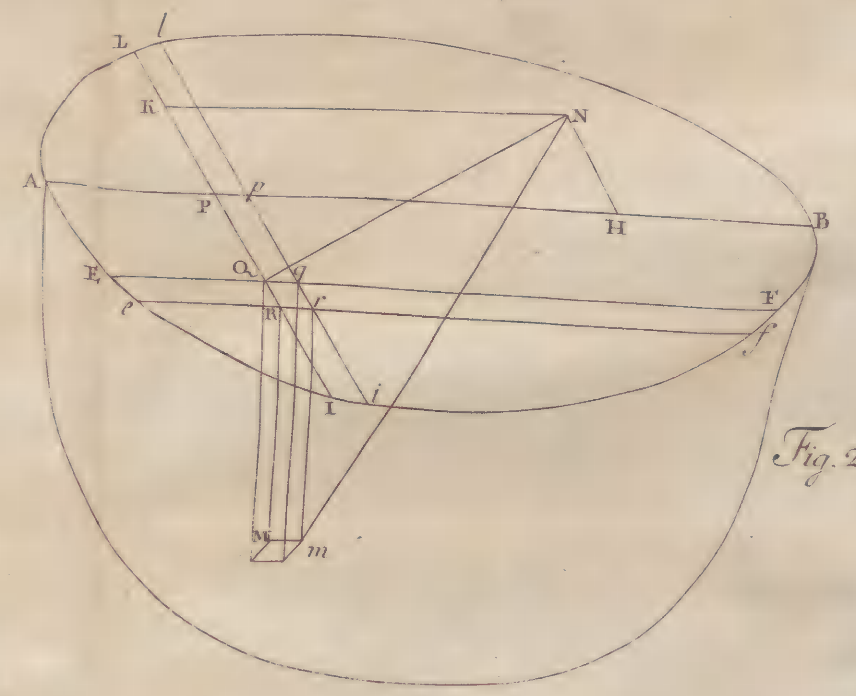


Fig. 2.

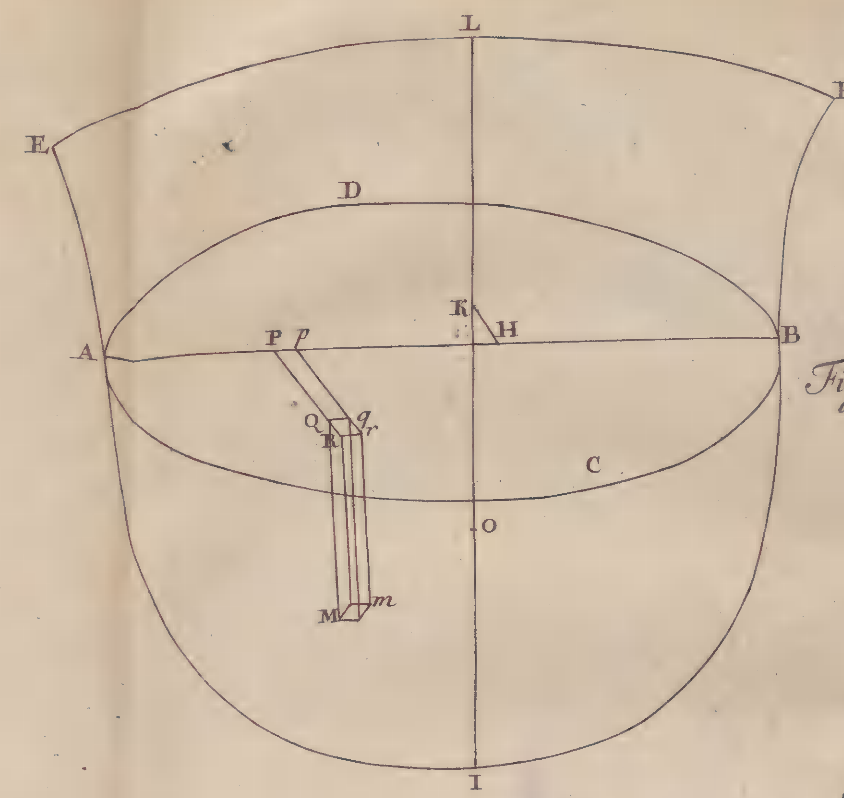


Fig. 1.

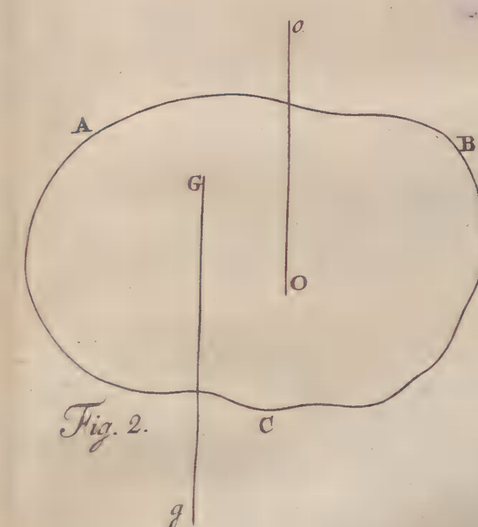
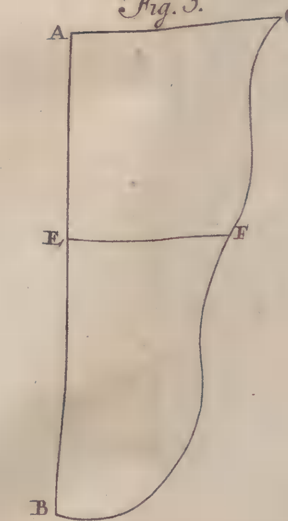


Fig. 2.

Fig. 3.



Pars I.

Tab. II.

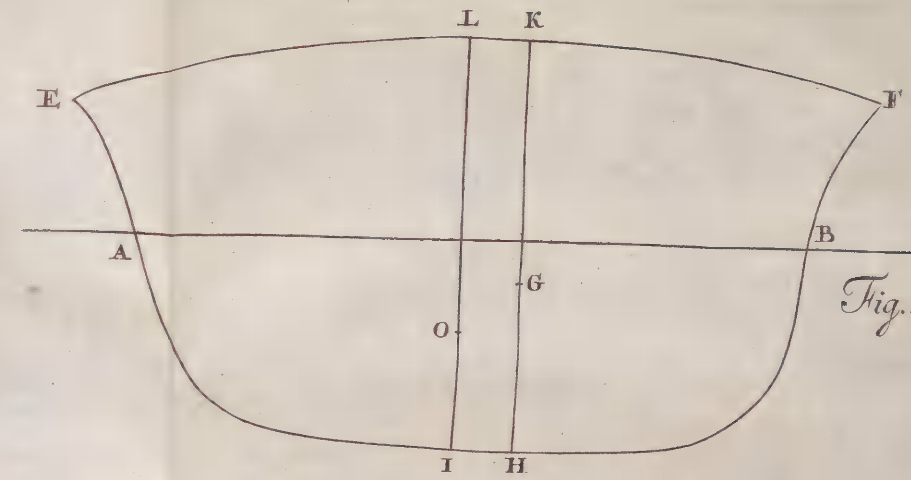


Fig. 1.

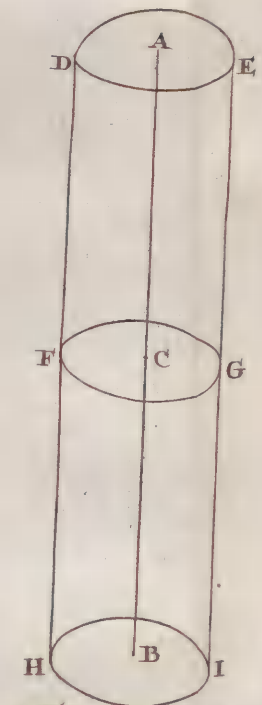


Fig. 2.

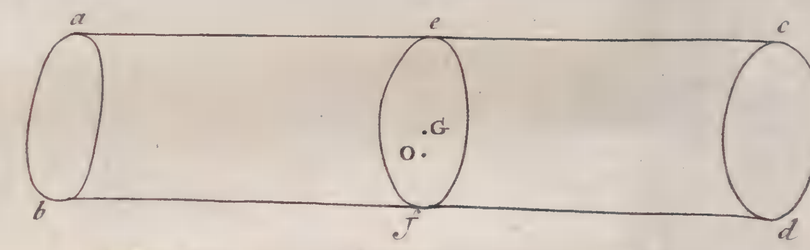
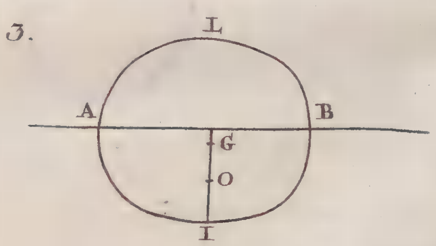


Fig. 3.



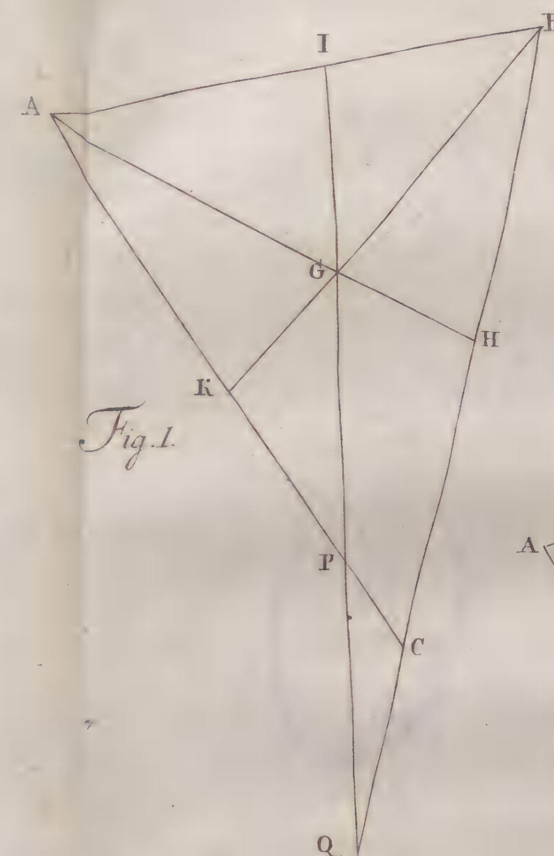


Fig. 1.

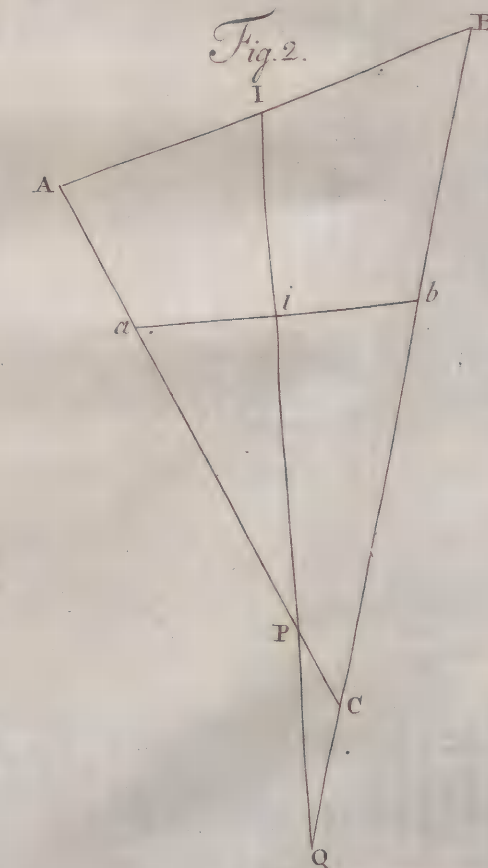


Fig. 2.

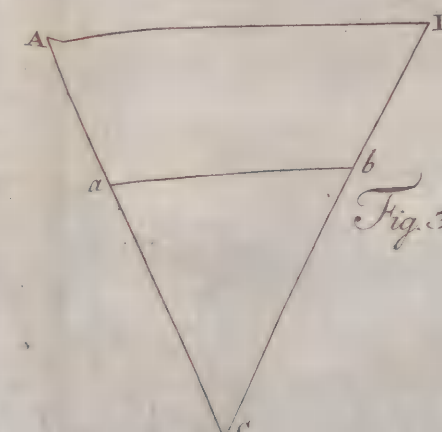


Fig. 3.

Fig. 1.

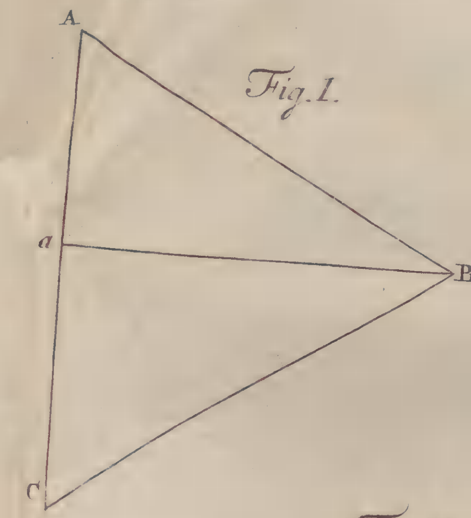


Fig. 2.

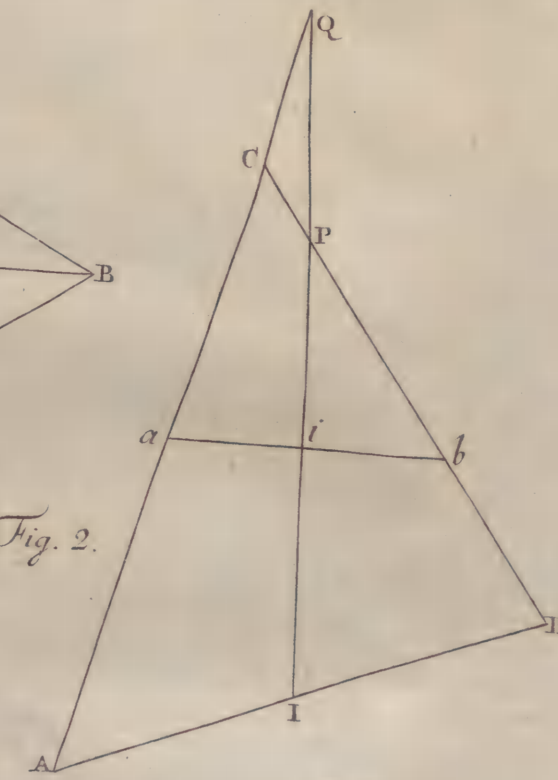


Fig. 3.

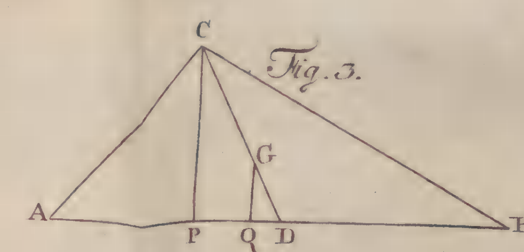
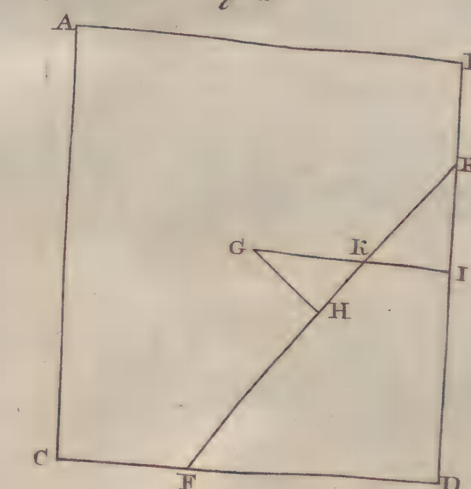


Fig. 4.



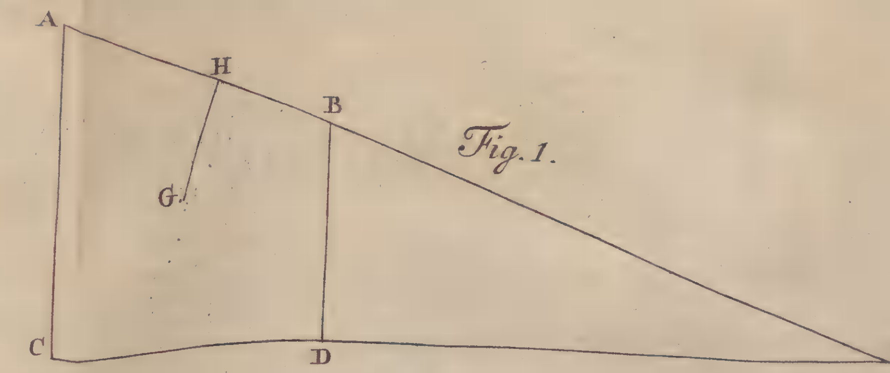


Fig. 1.

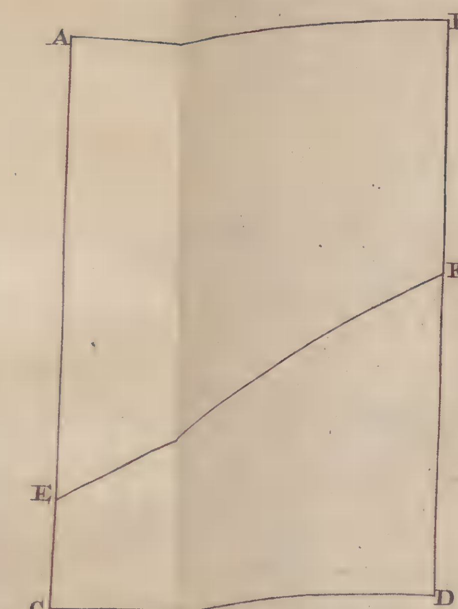


Fig. 2.

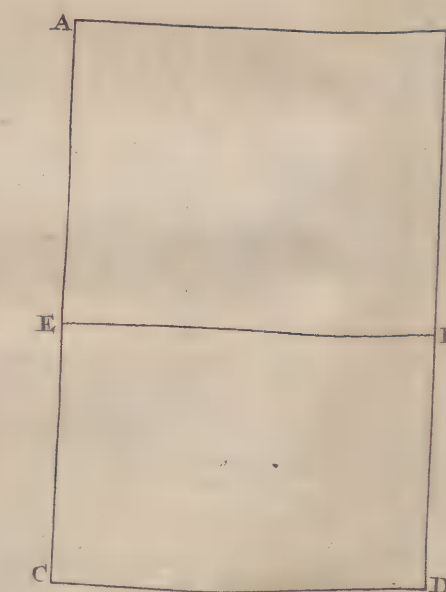
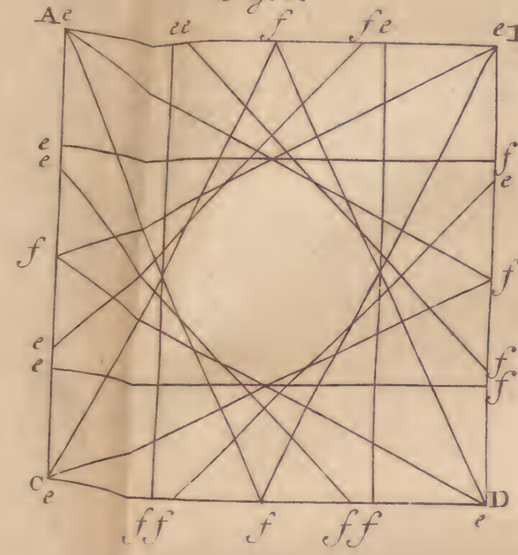


Fig. 3.

Fig. 1.



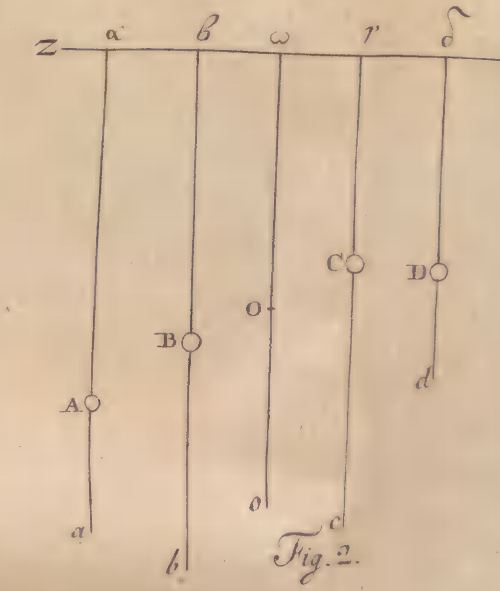


Fig. 2.

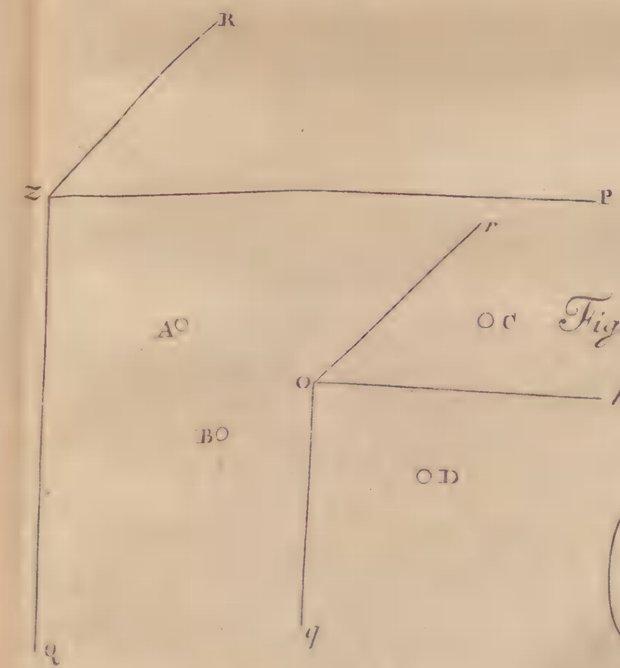


Fig. 3.

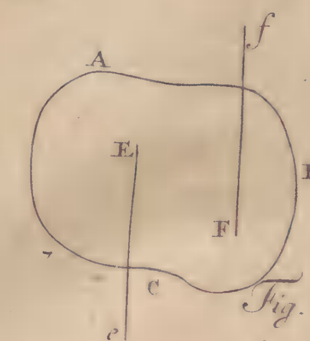
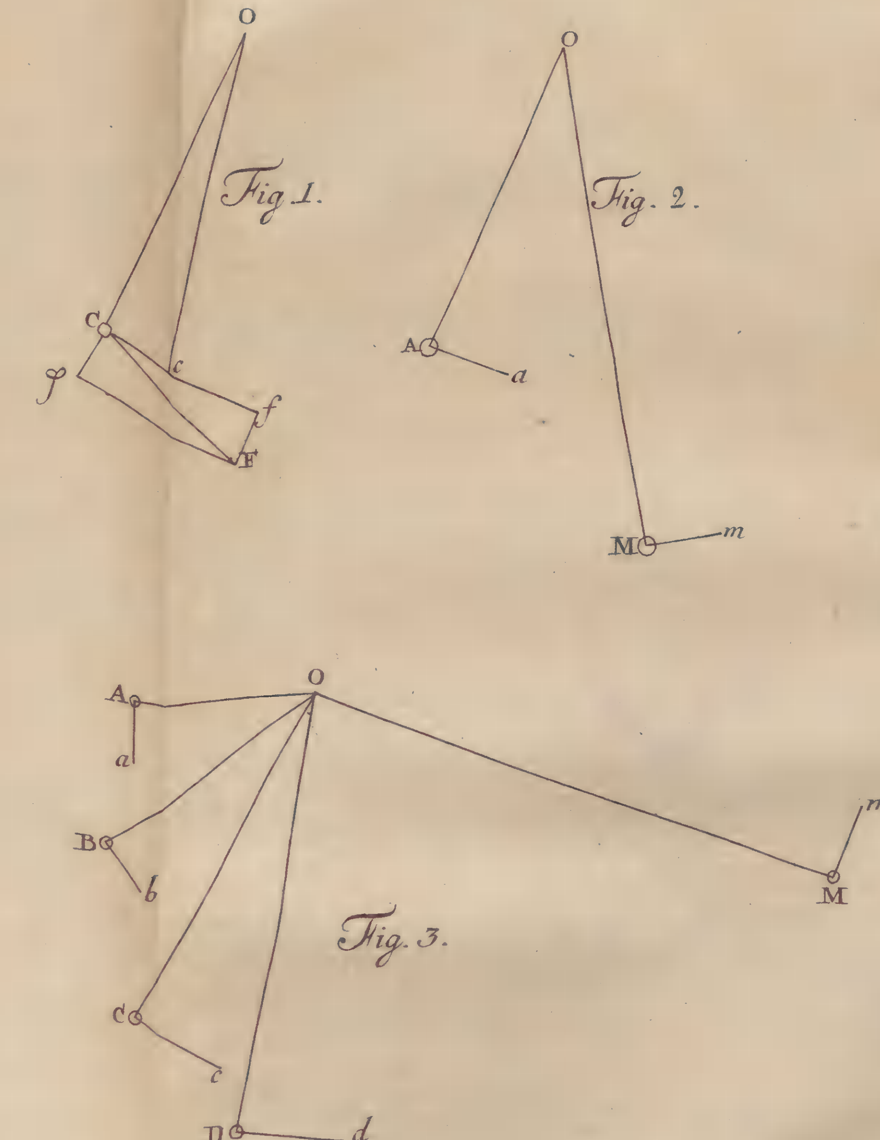


Fig. 4.



Pars I.

Tab. VIII.

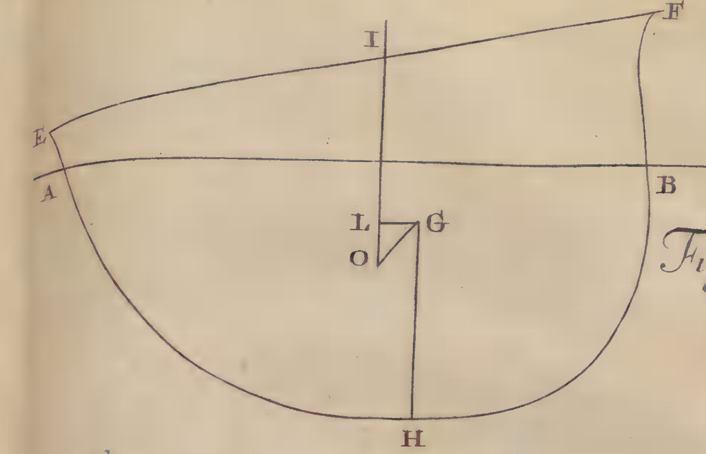


Fig. 1.

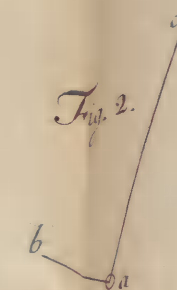


Fig. 2.

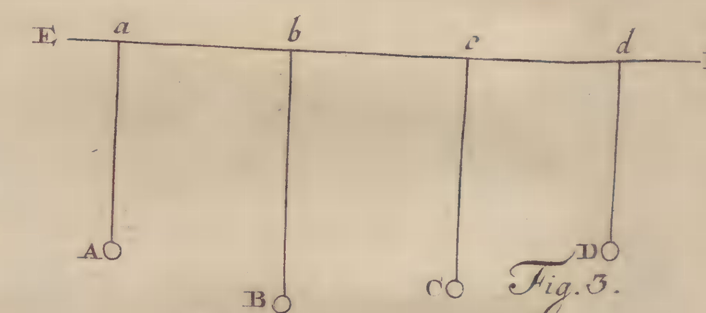


Fig. 3.

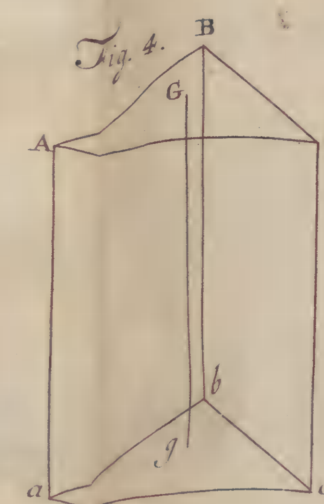


Fig. 4.

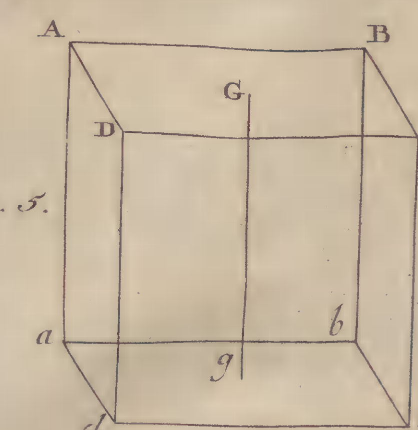


Fig. 5.

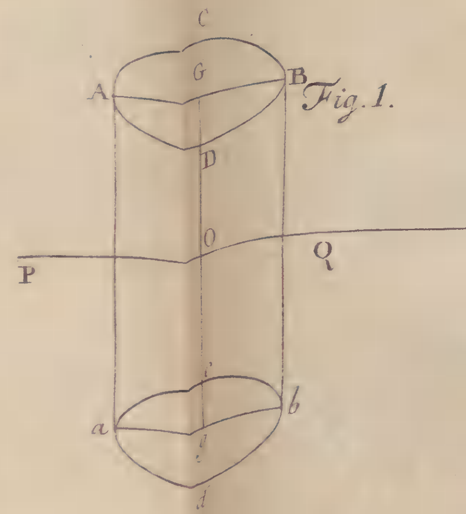


Fig. 1.

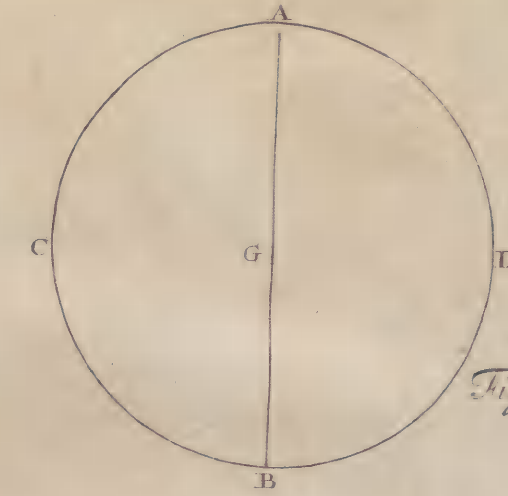
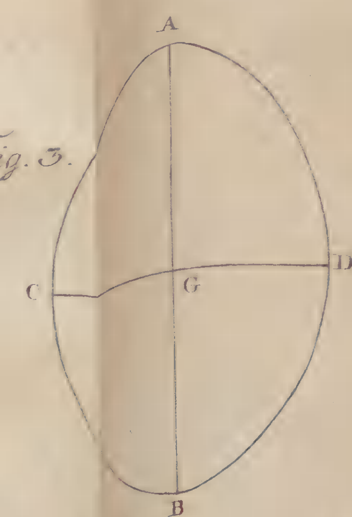


Fig. 2.

Fig. 3.



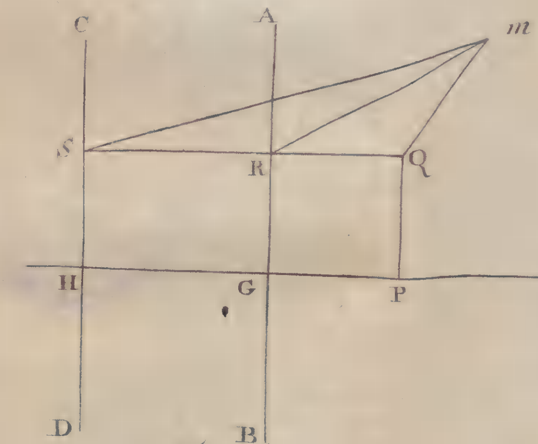


Fig. 4.

Fig. 1.

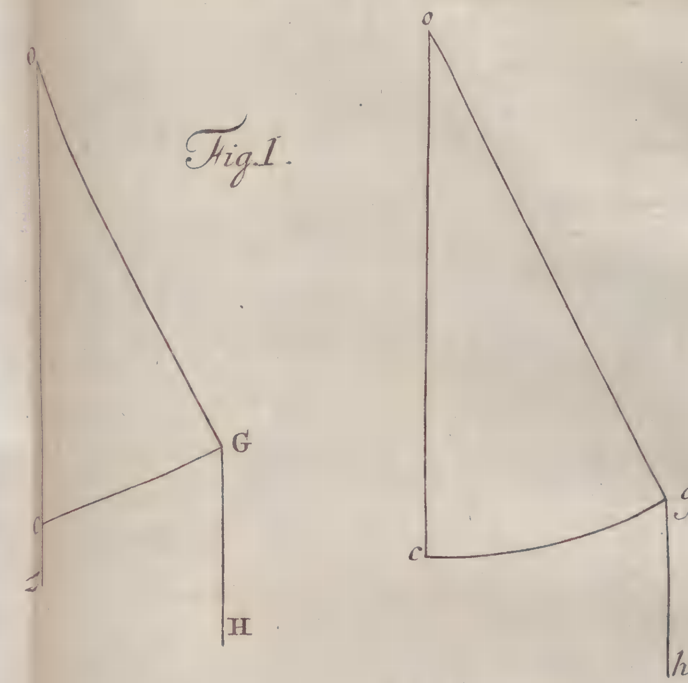
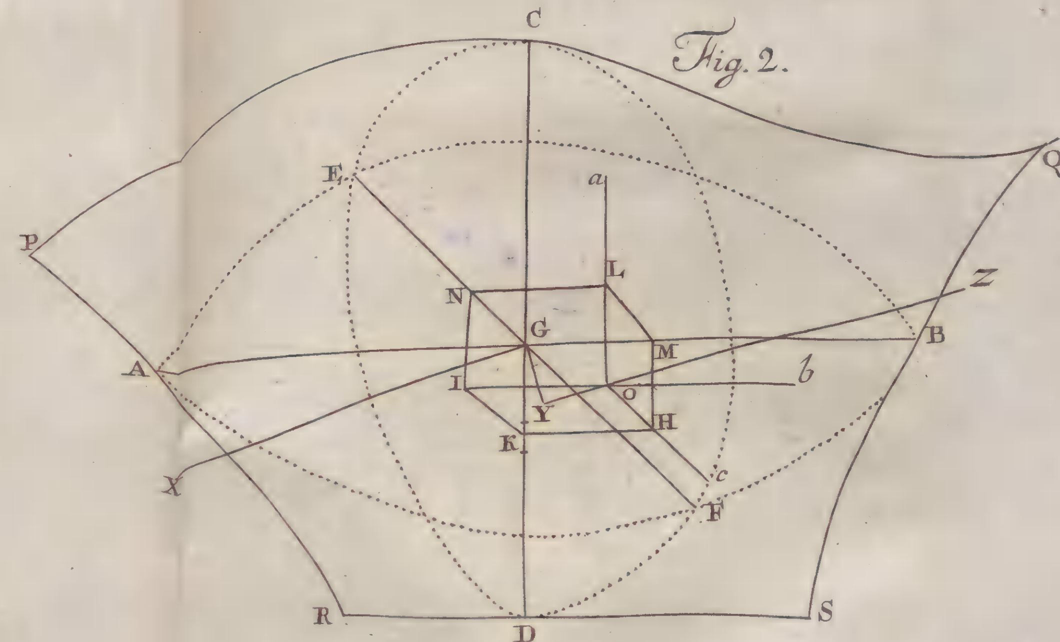
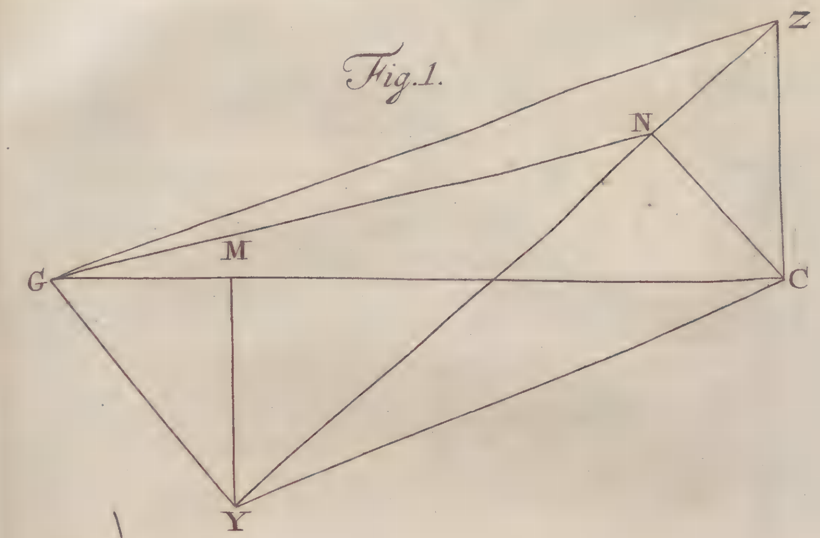
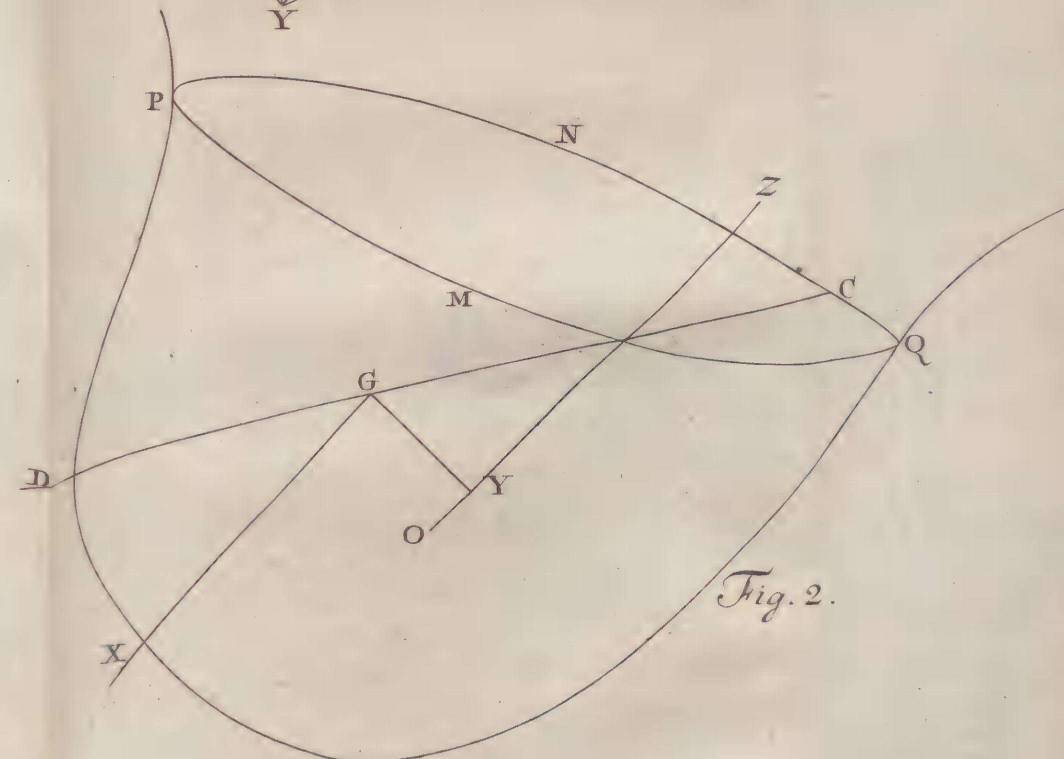


Fig. 2.







Pars I.

Tab XII.

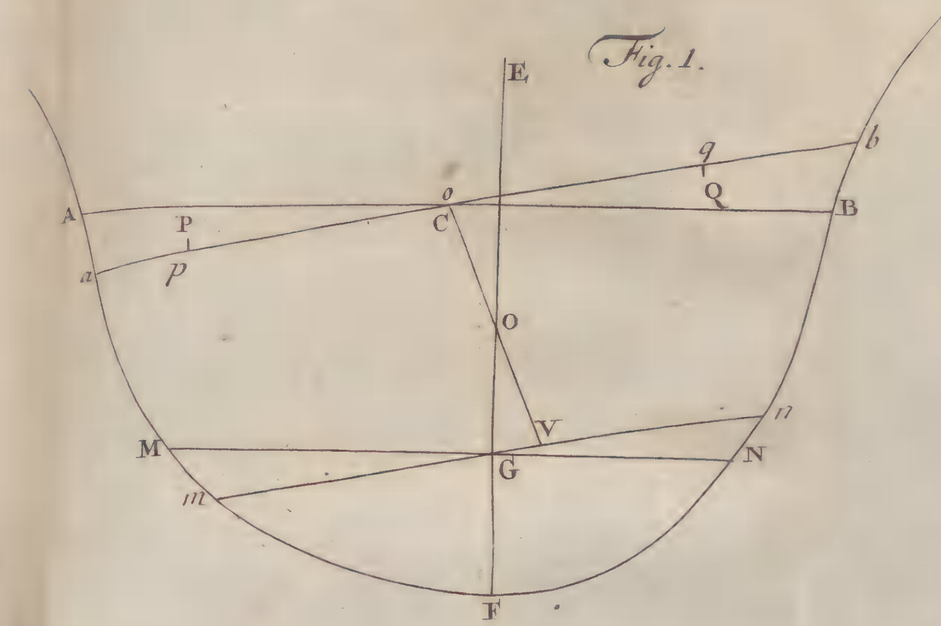


Fig. 1.

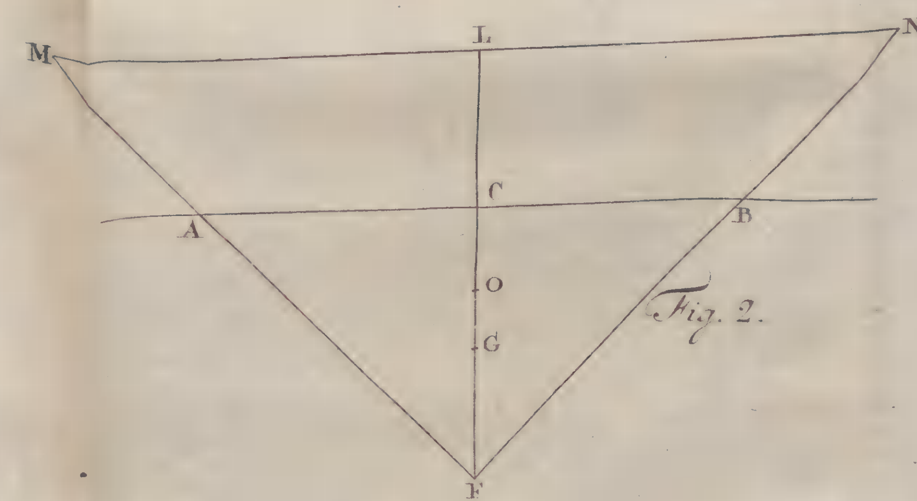


Fig. 2.

Fig. 1.

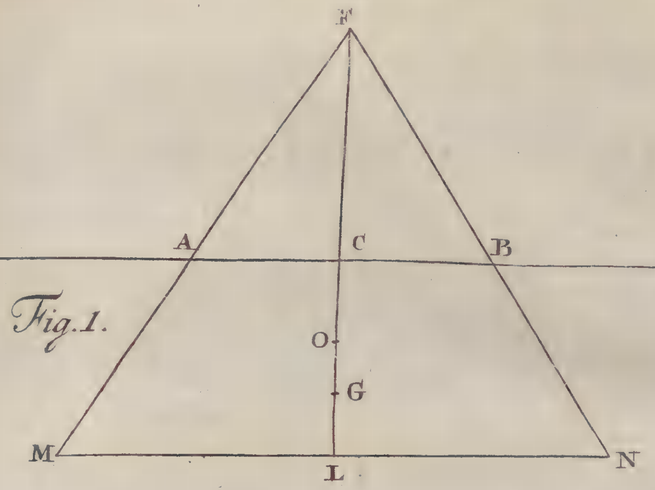


Fig. 2.

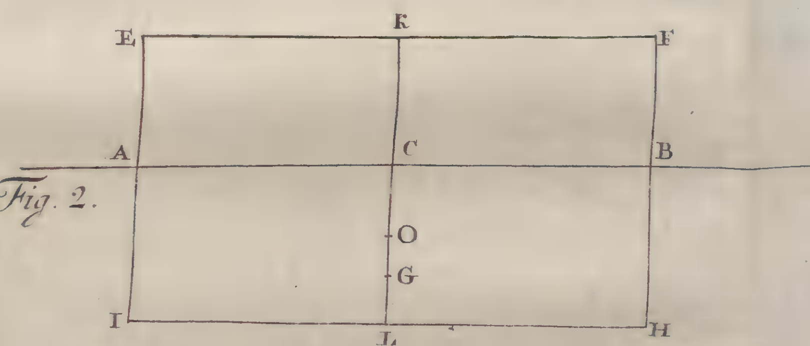


Fig. 3.

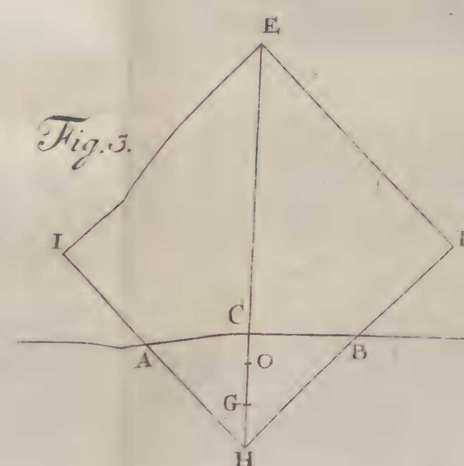


Fig. 4.

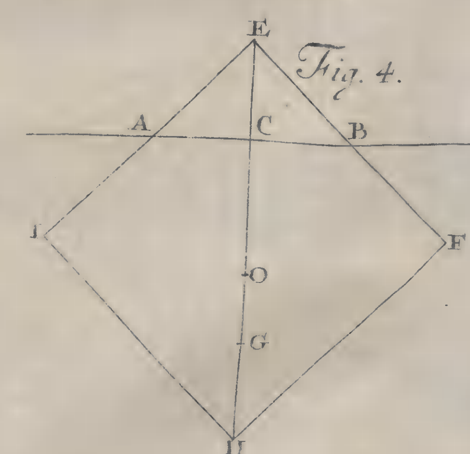


Fig. I.

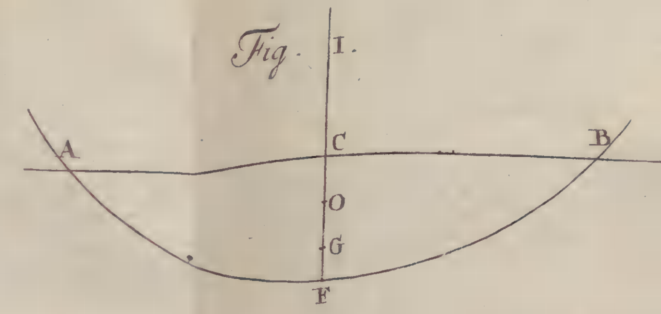
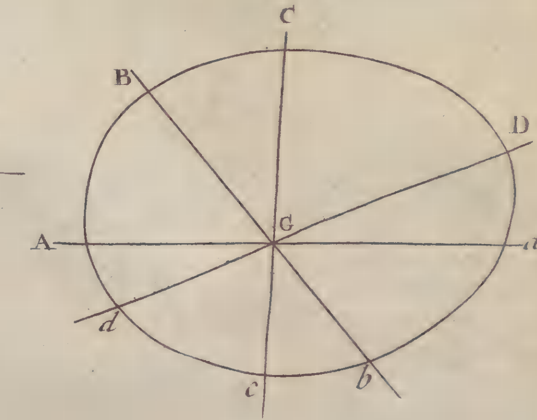


Fig. 2.



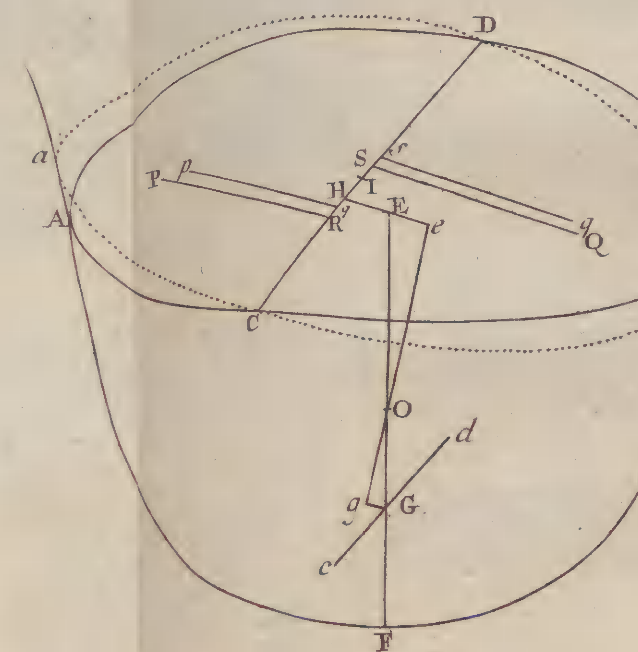


Fig. 3.

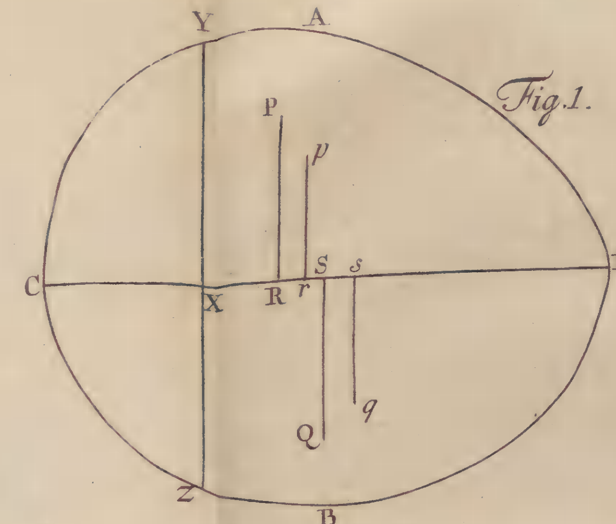


Fig. 1.

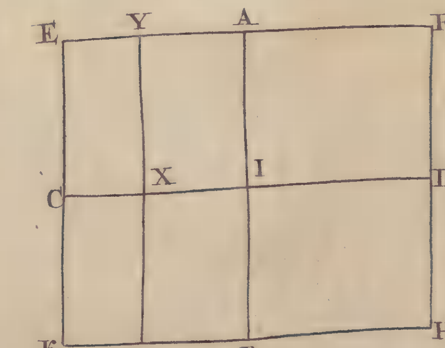


Fig. 2.

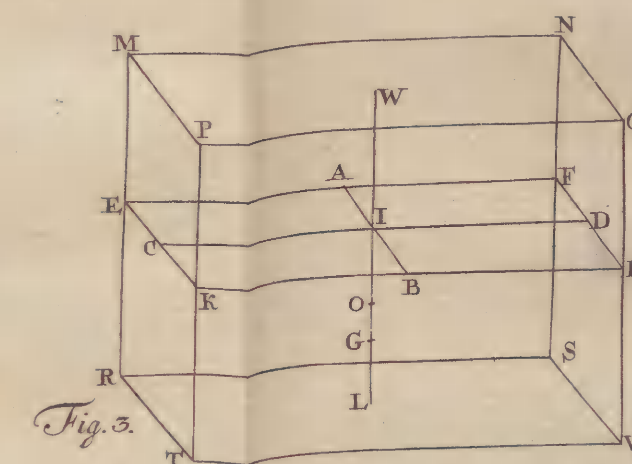


Fig. 3.

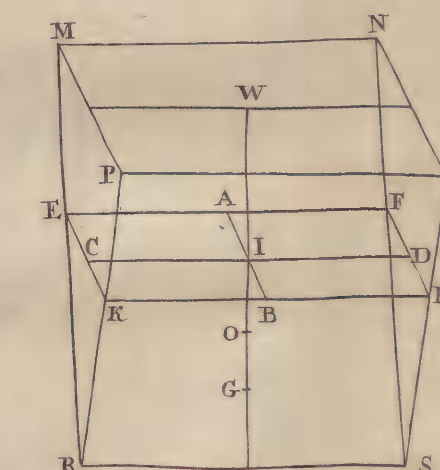


Fig. 4.

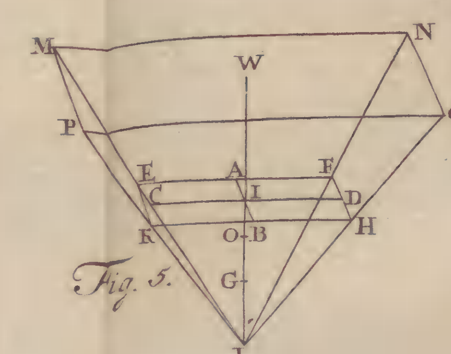


Fig. 5.

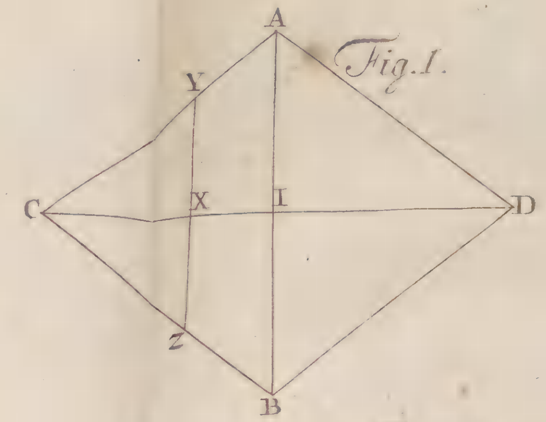


Fig. 1.

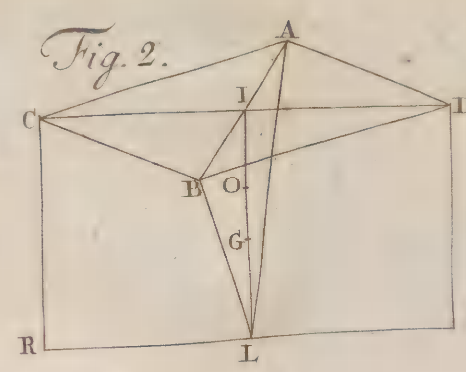


Fig. 2.

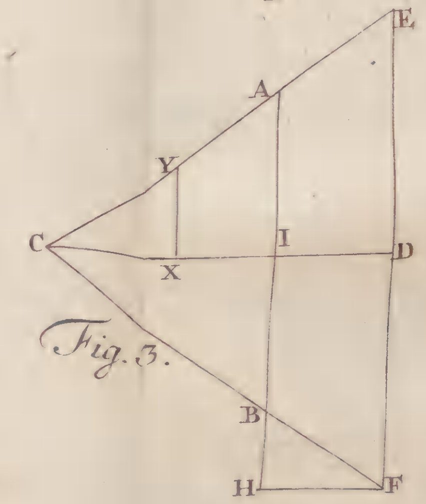


Fig. 3.

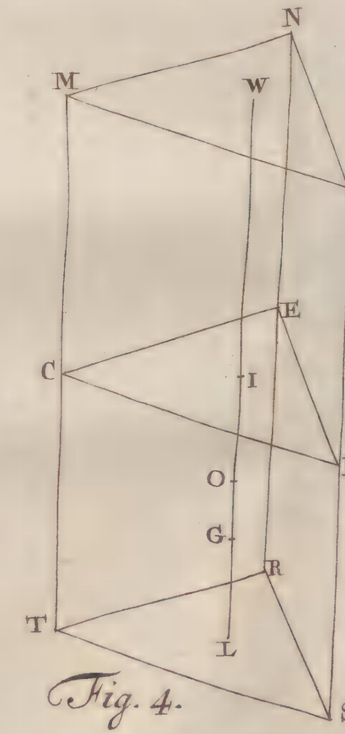


Fig. 4.

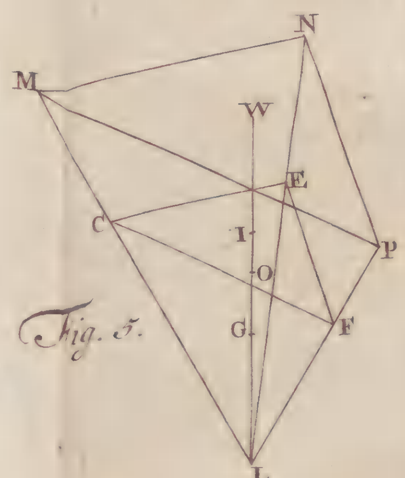


Fig. 5.

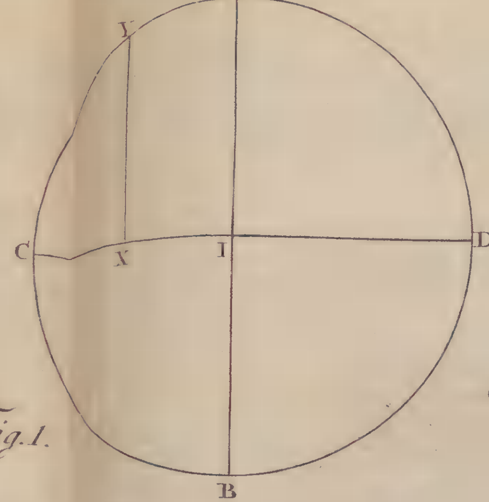


Fig. 1.

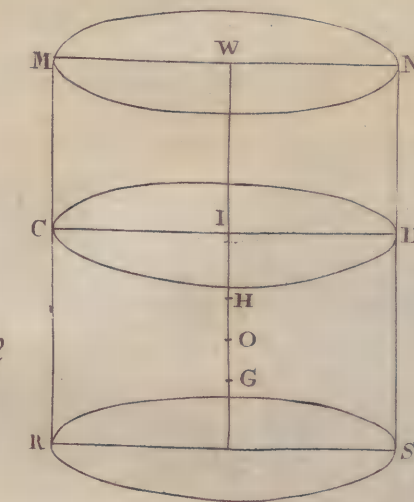


Fig. 2

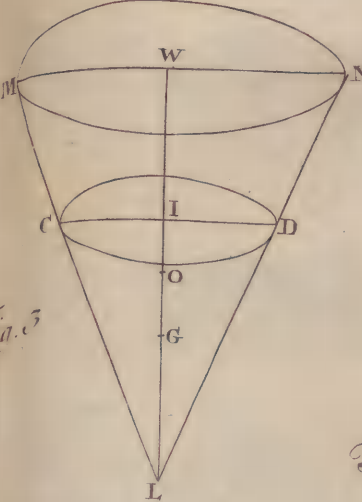


Fig. 3

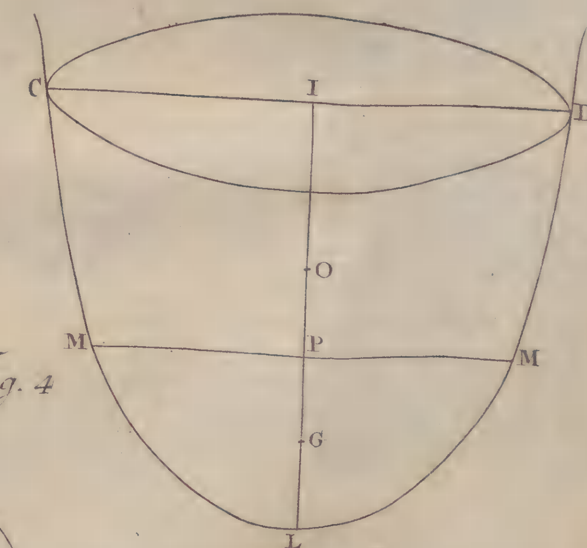


Fig. 4

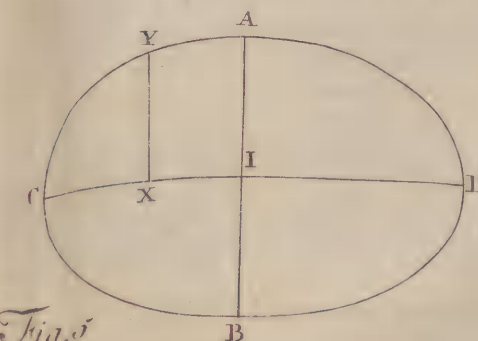


Fig. 5

Part I. Tab. XVIII.

Fig. 1.

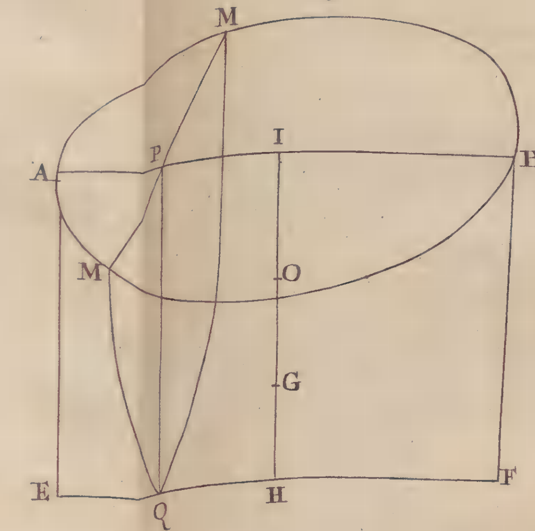
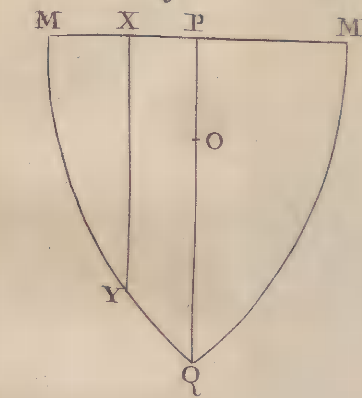


Fig. 2.



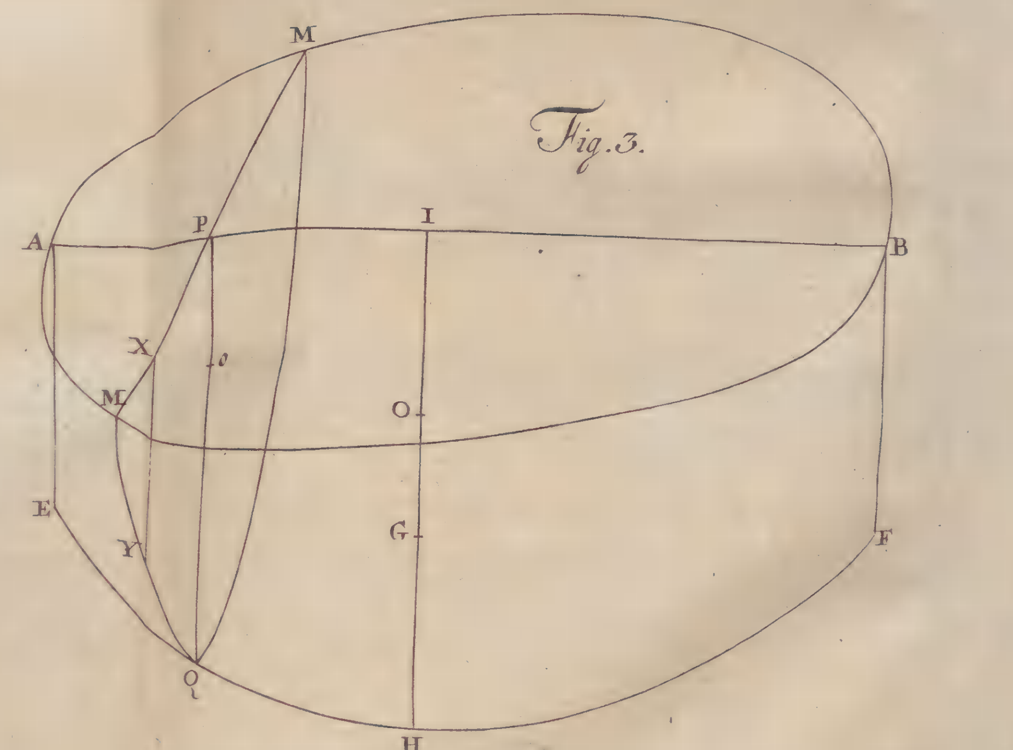


Fig. 3.

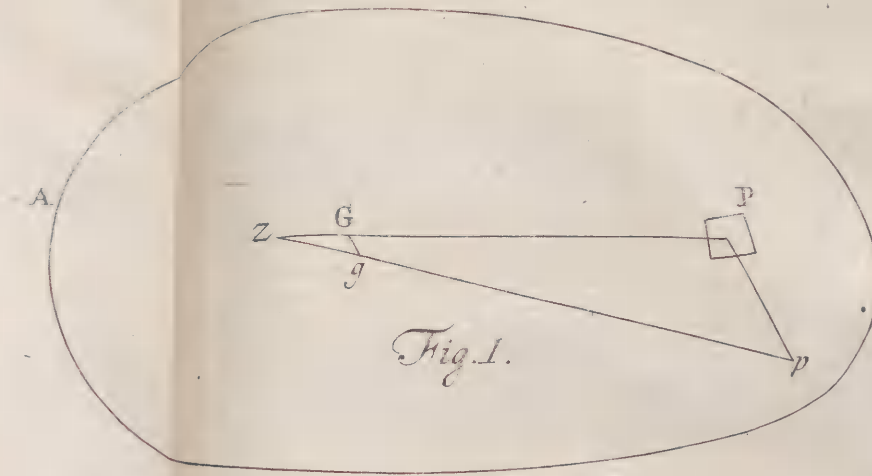
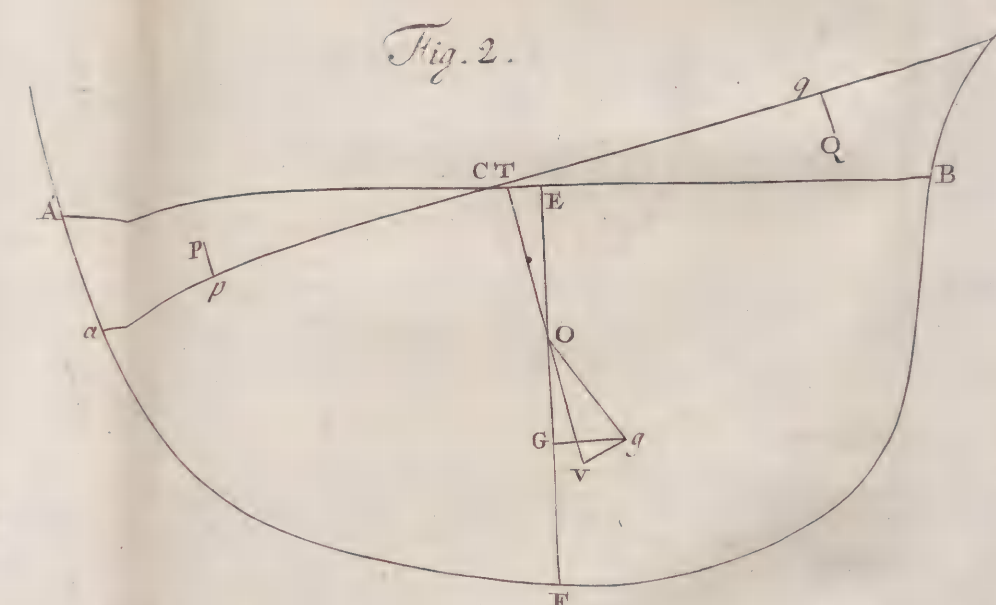


Fig. 1.

Fig. 2.



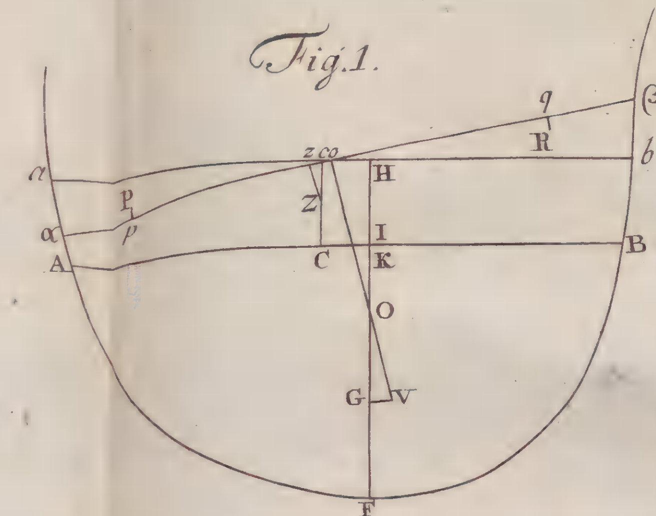


Fig. 1.

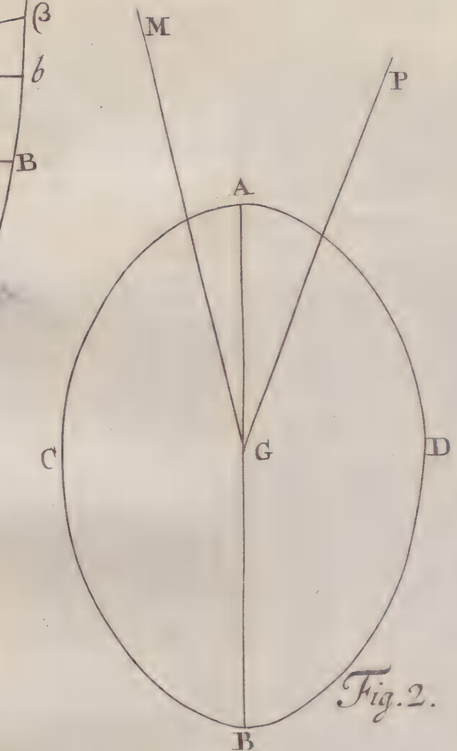


Fig. 2.

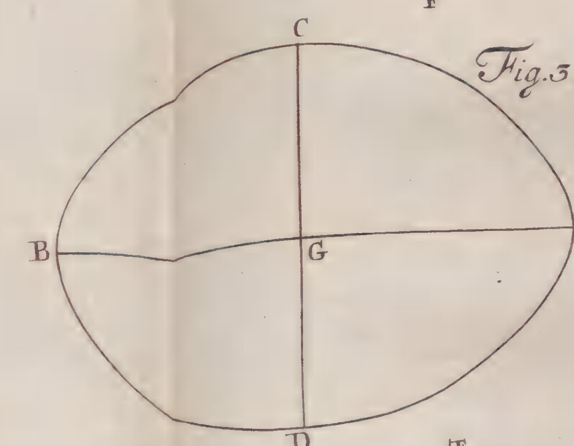


Fig. 3.

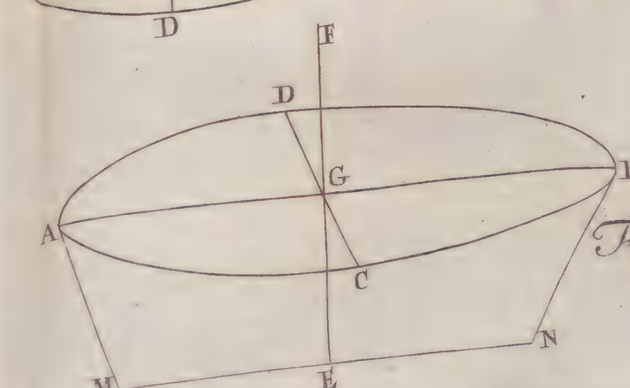


Fig. 4.

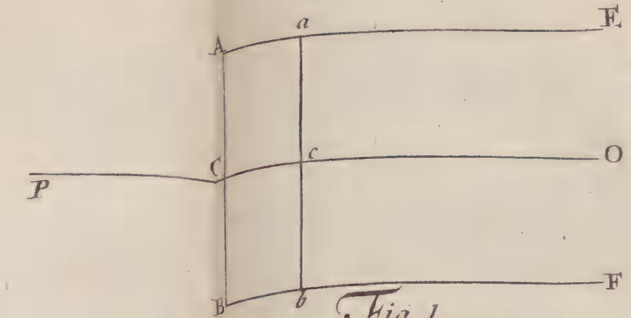


Fig. 1.

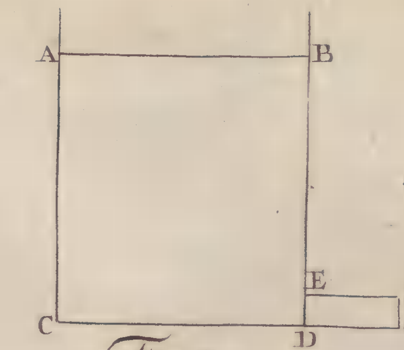


Fig. 2.

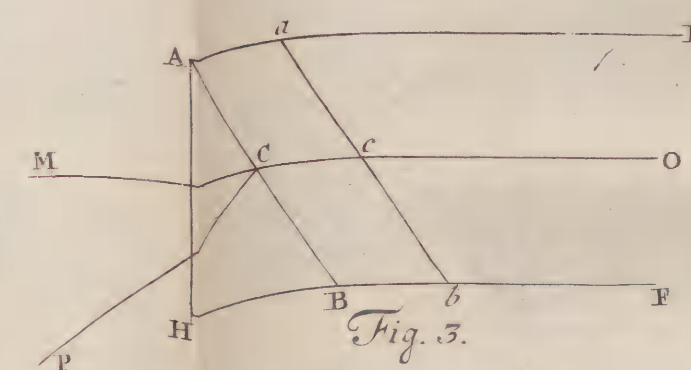


Fig. 3.

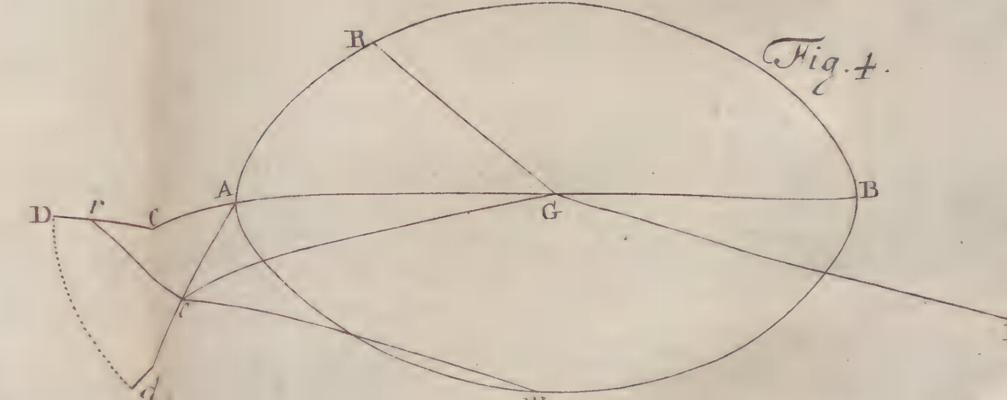
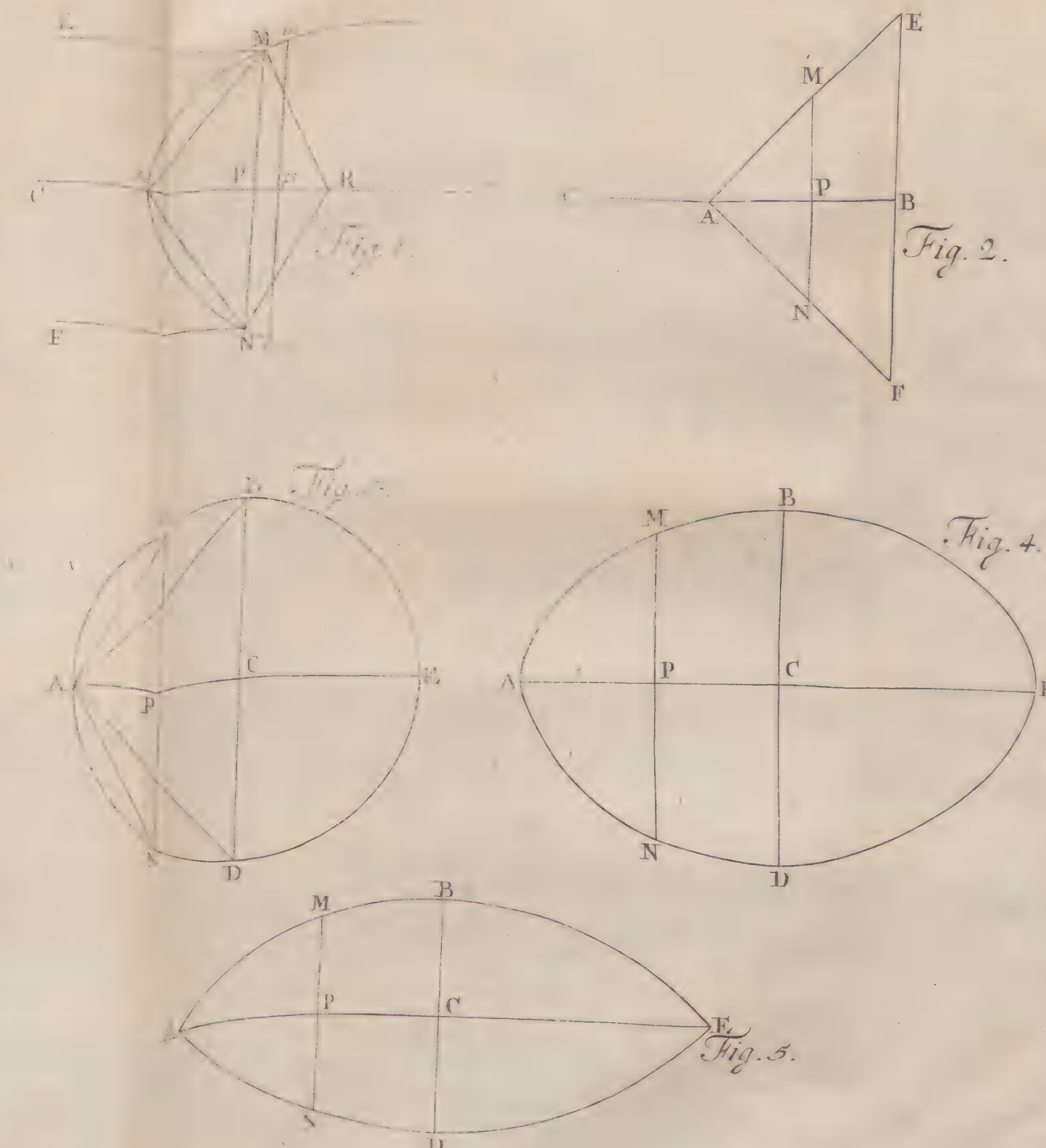


Fig. 4.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

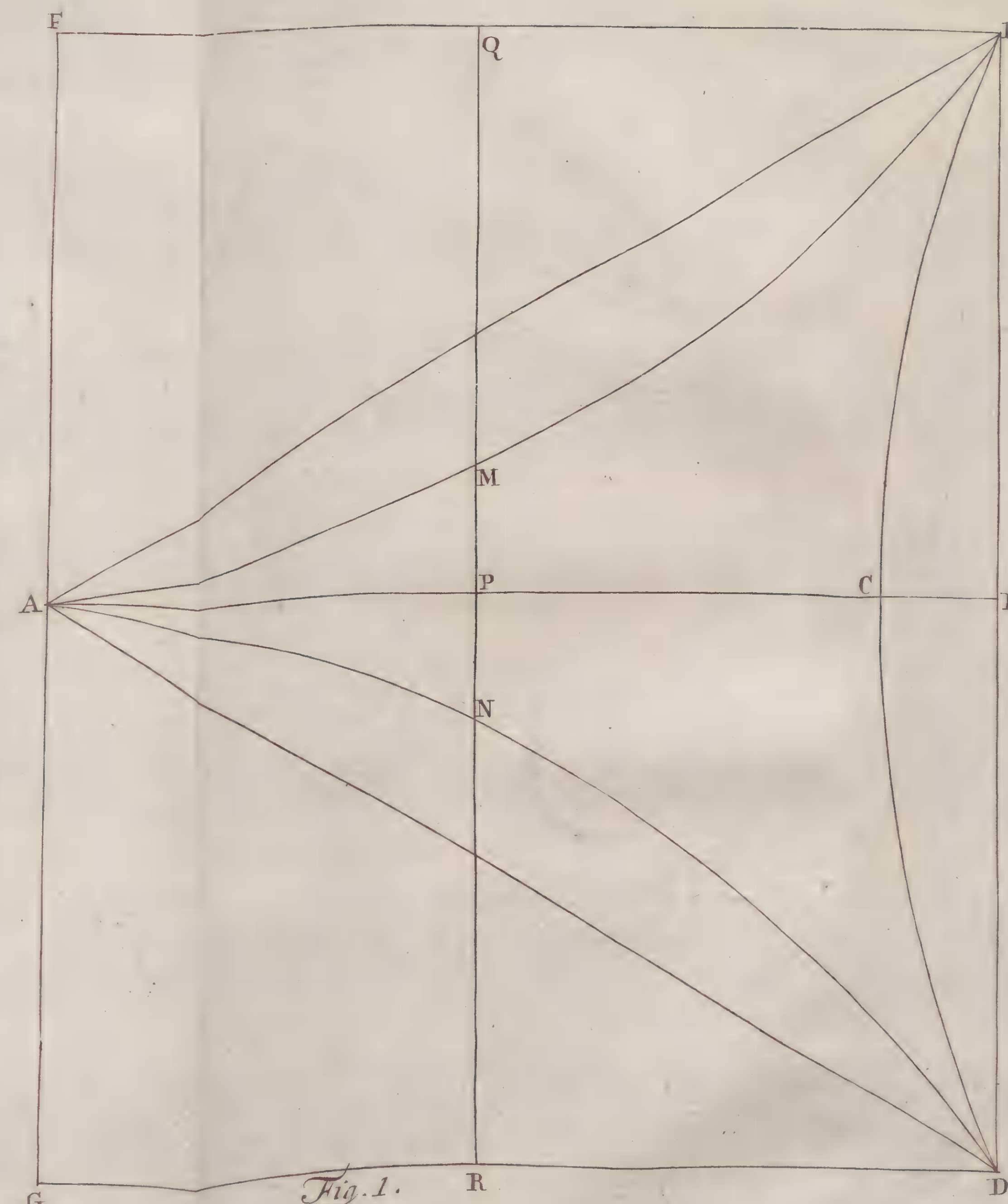


Fig. 1.

Pars I.

Tab. XXIIII.

Fig. 1.

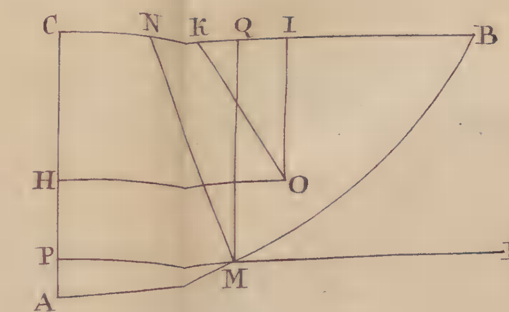


Fig. 2.

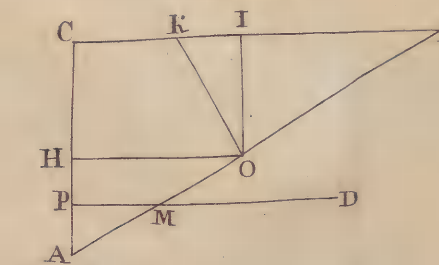


Fig. 3.

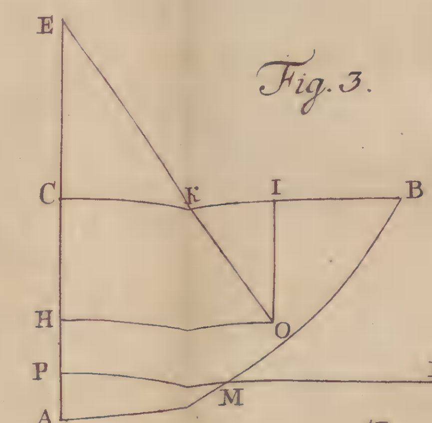


Fig. 4.

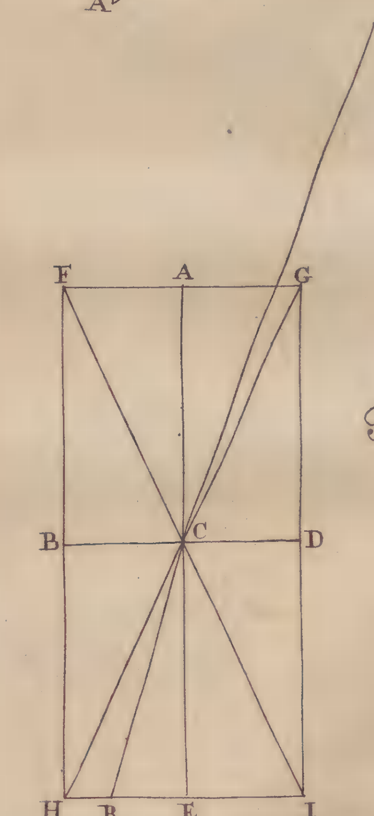
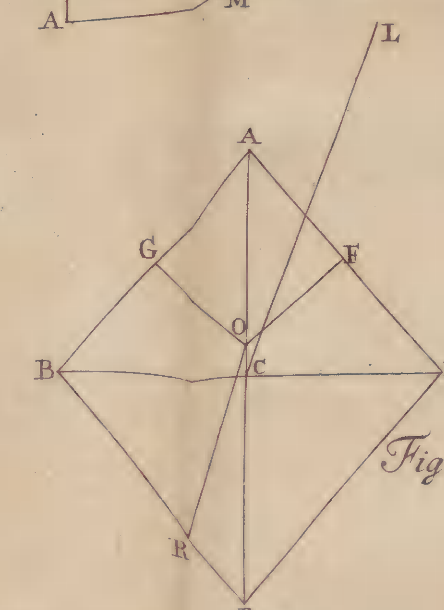


Fig. 5



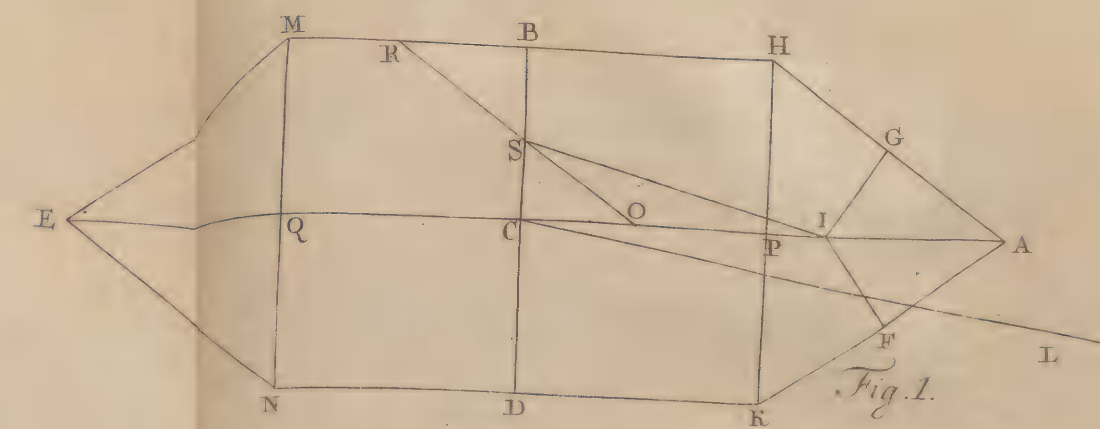


Fig. 1.

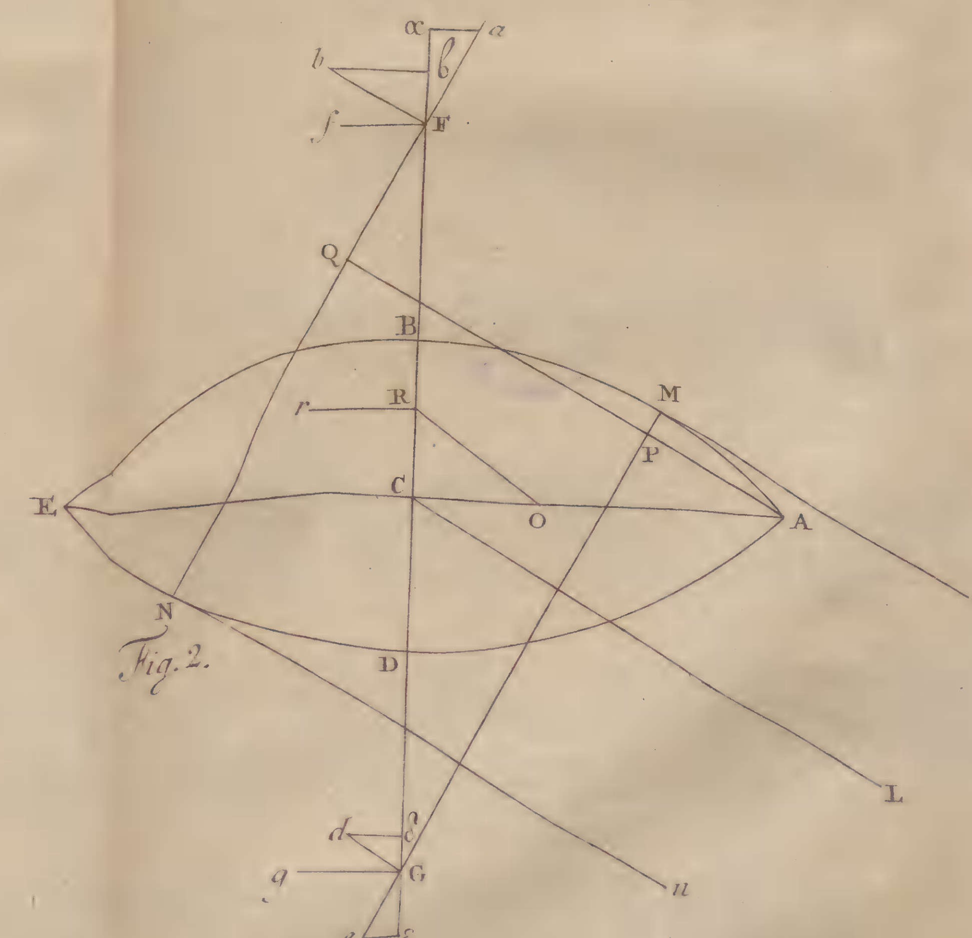
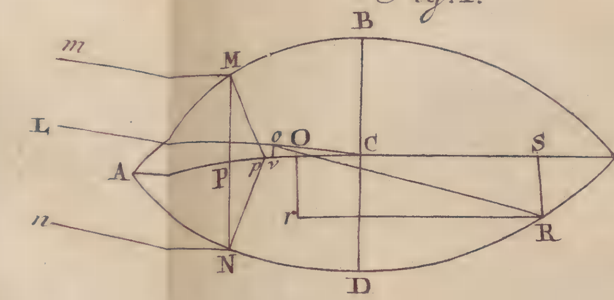


Fig. 2.

Fig. 1.



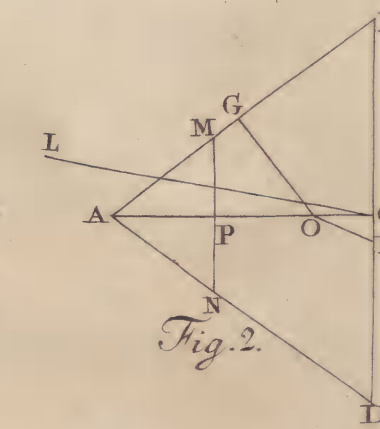
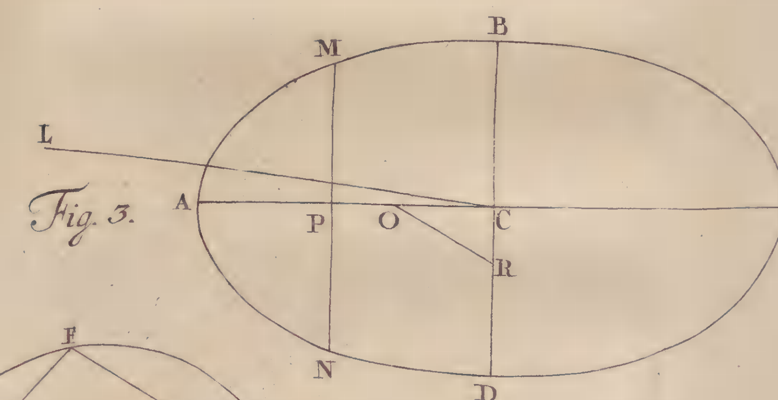


Fig. 2.

Fig. 3.



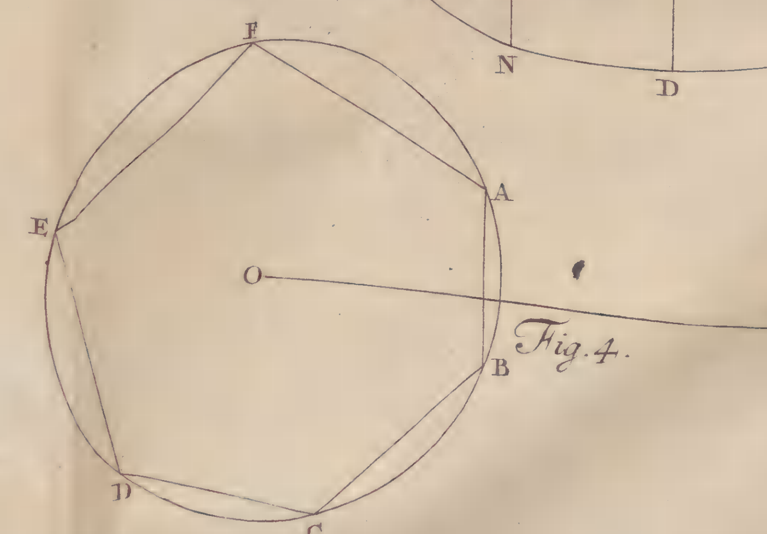


Fig. 4.

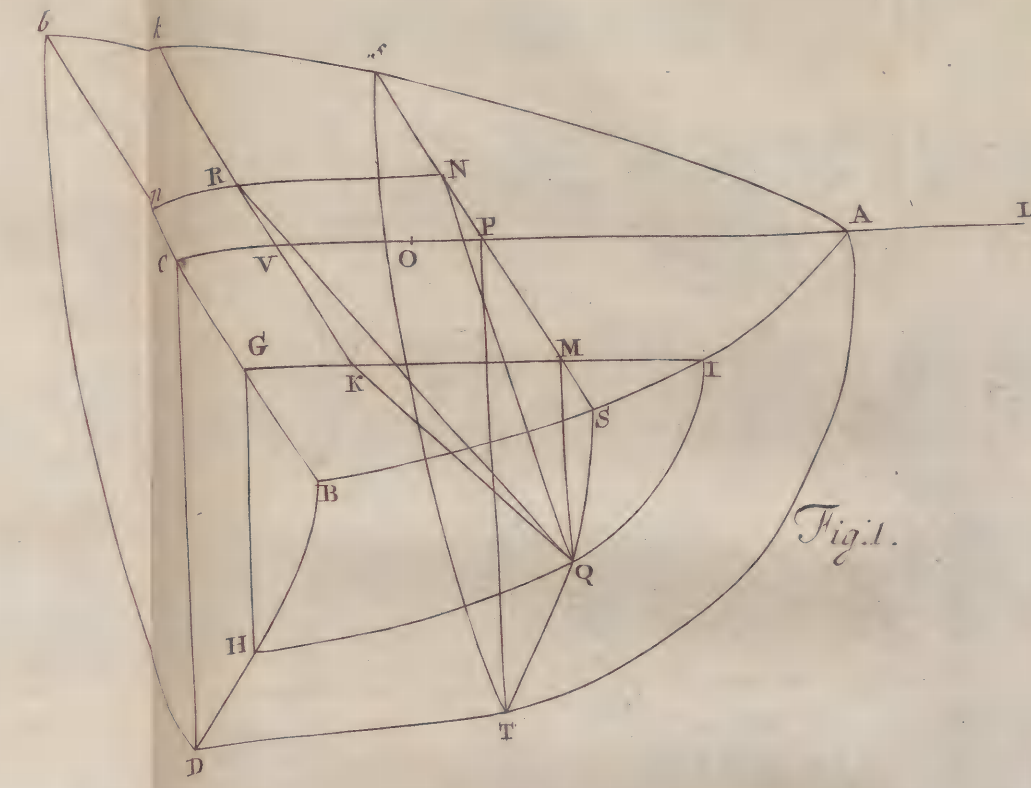
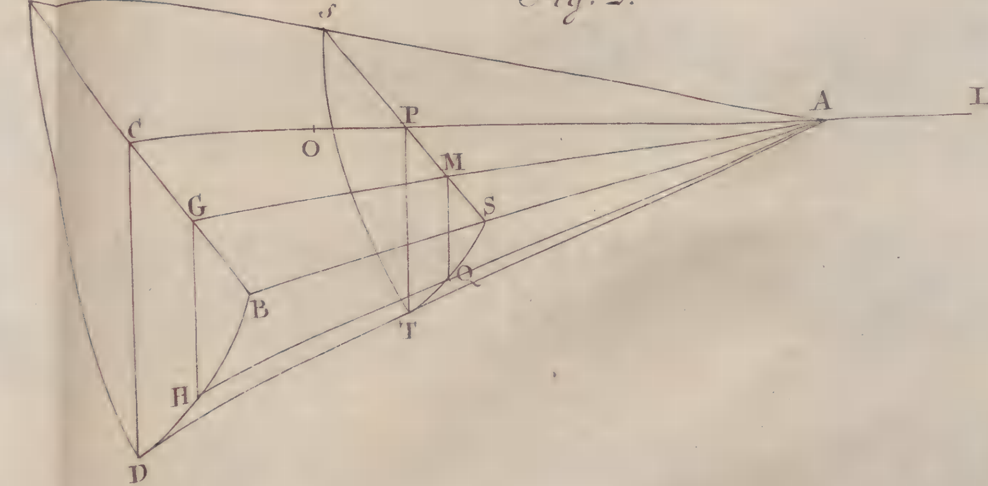


Fig. 1.

Fig. 2.



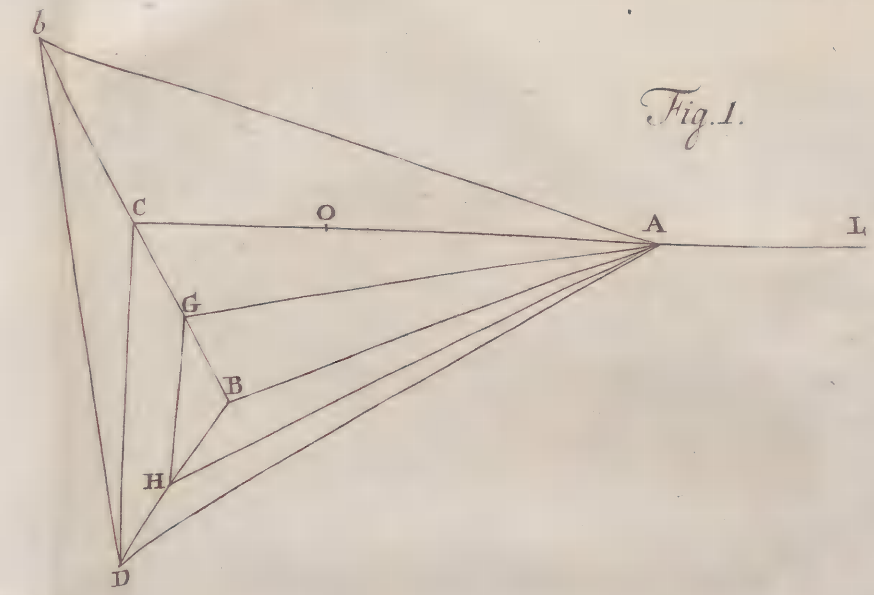


Fig. 1.

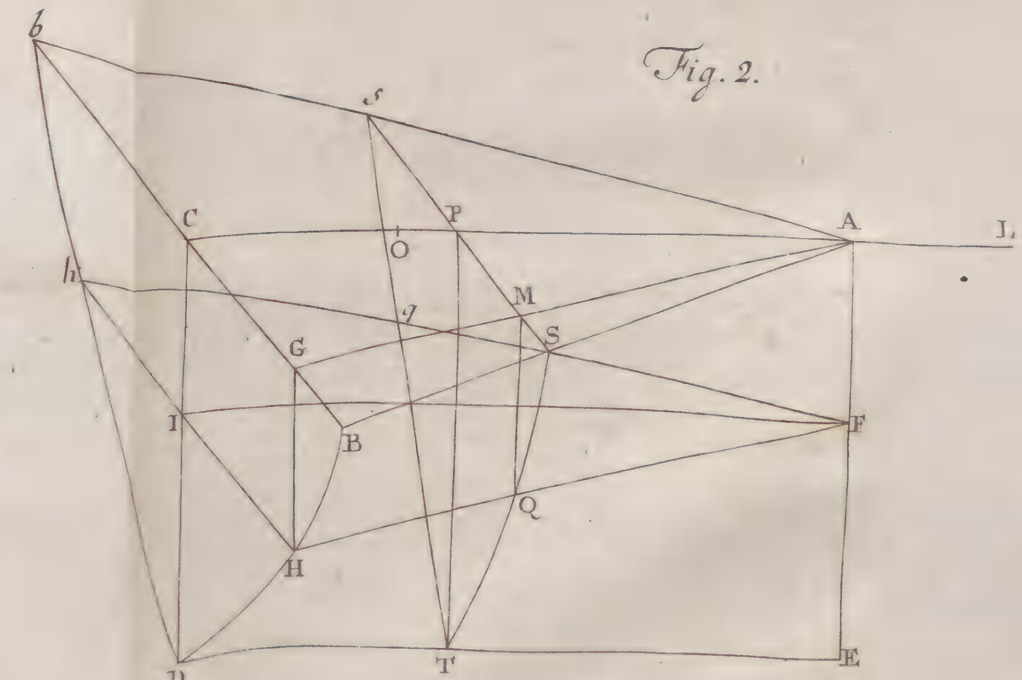


Fig. 2.

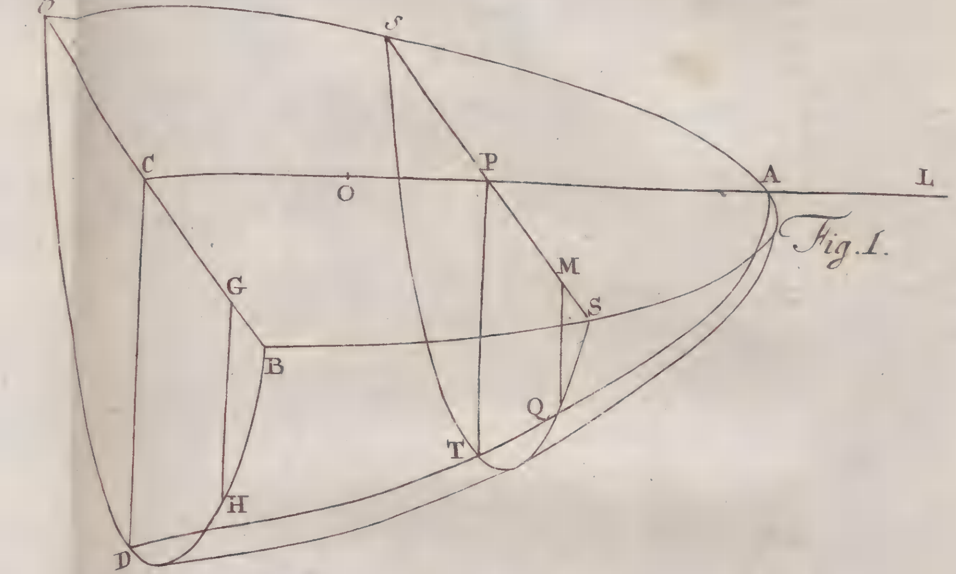
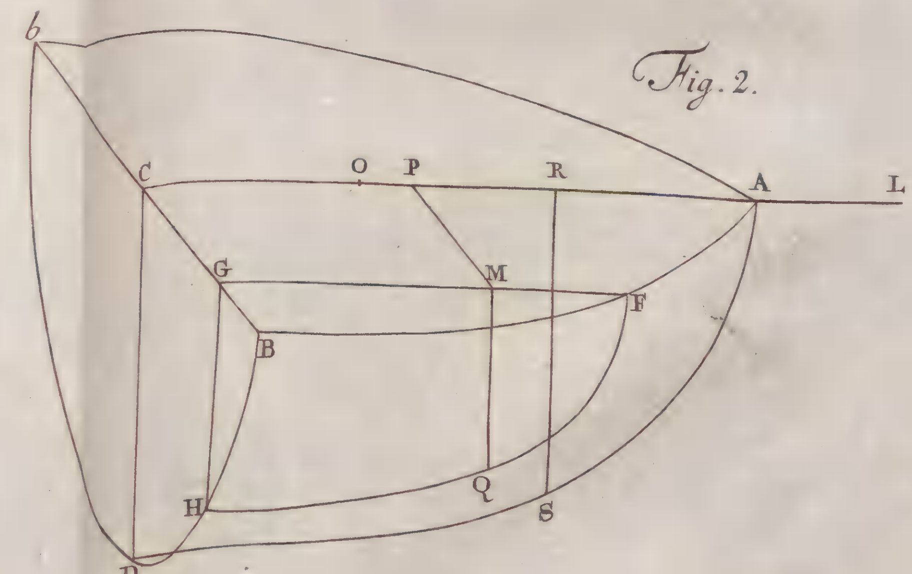


Fig. 1.

Fig. 2.



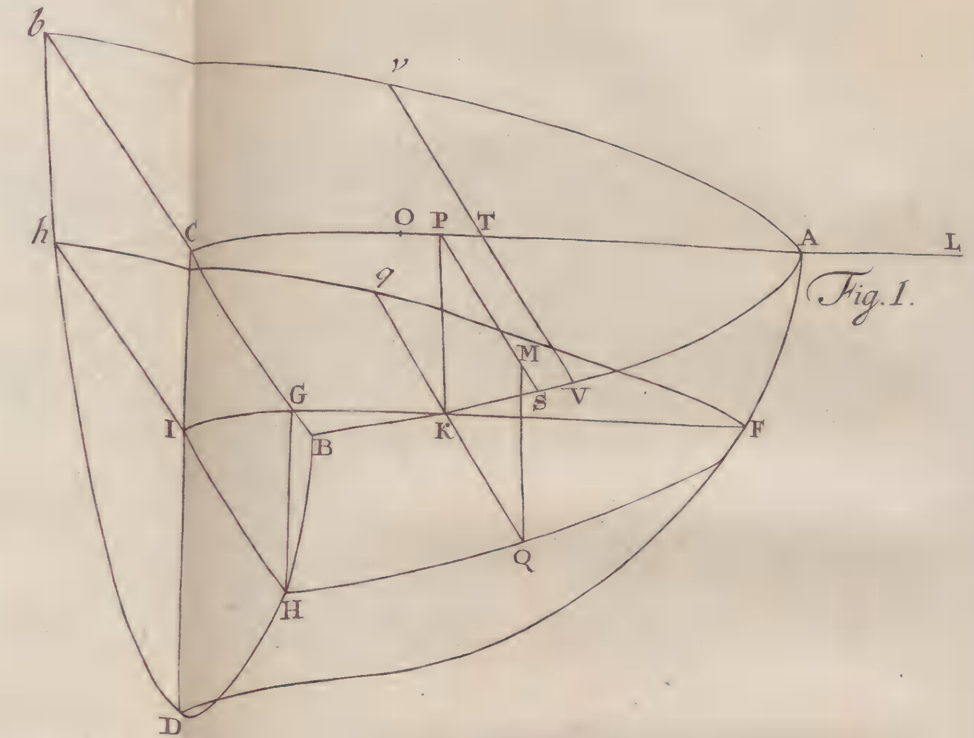


Fig. 1.

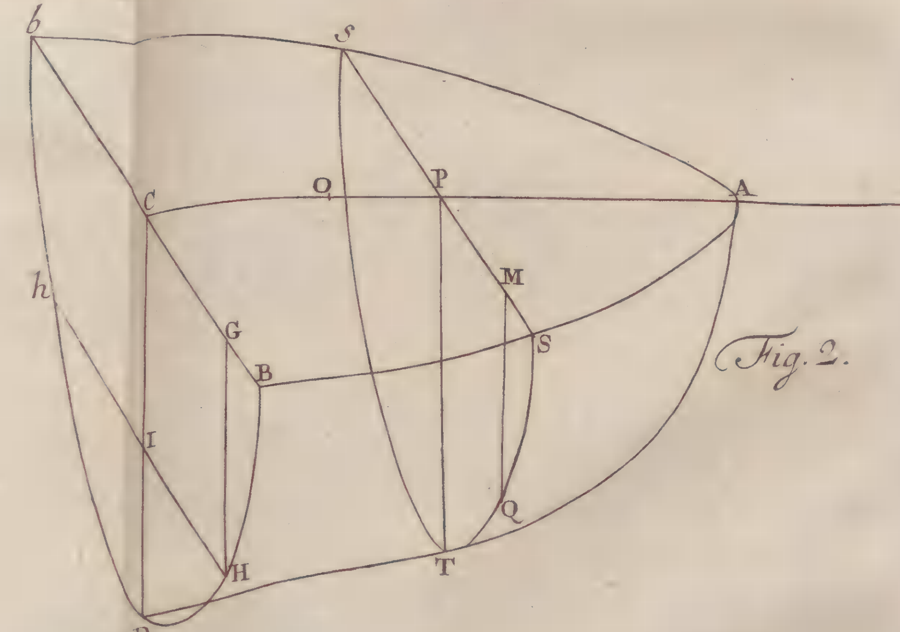


Fig. 2.

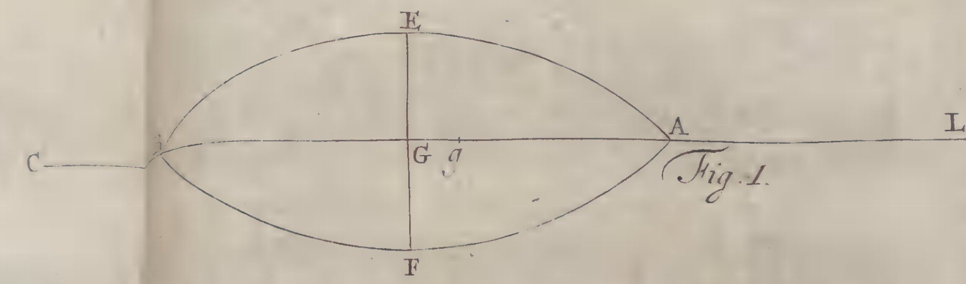


Fig. 1.

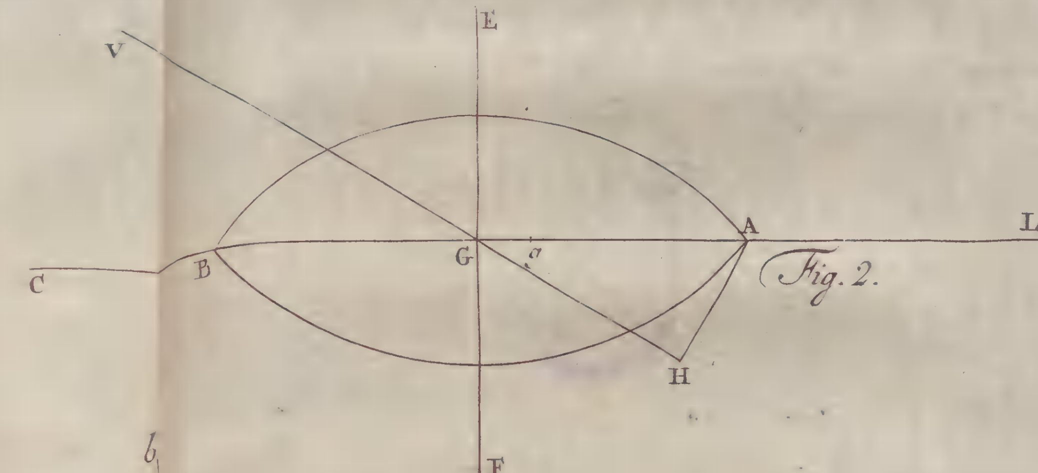


Fig. 2.

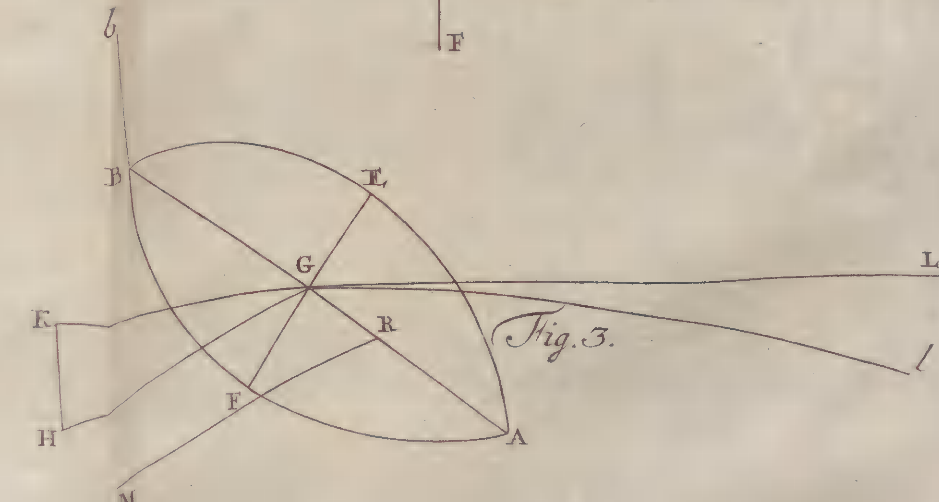


Fig. 3.

Tab. XXXII.

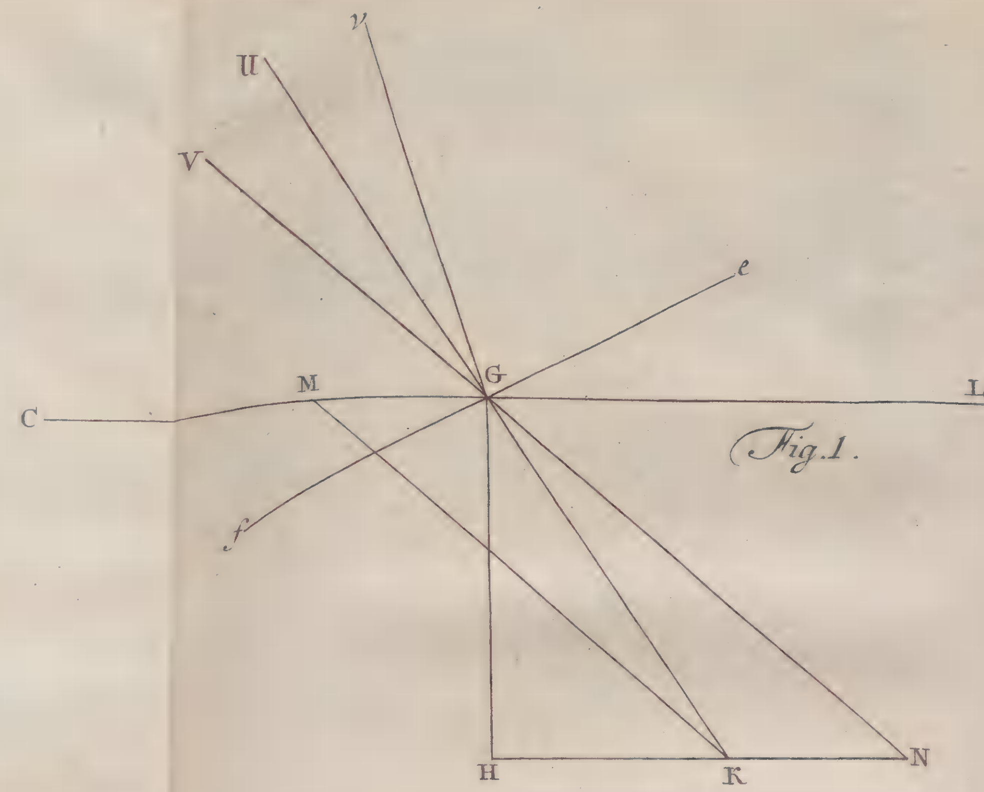


Fig. 1.

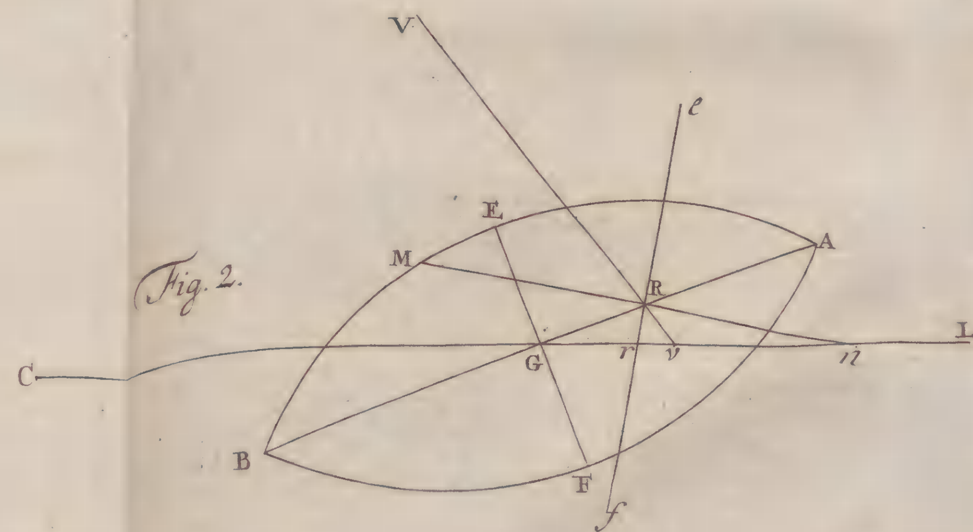


Fig. 2.

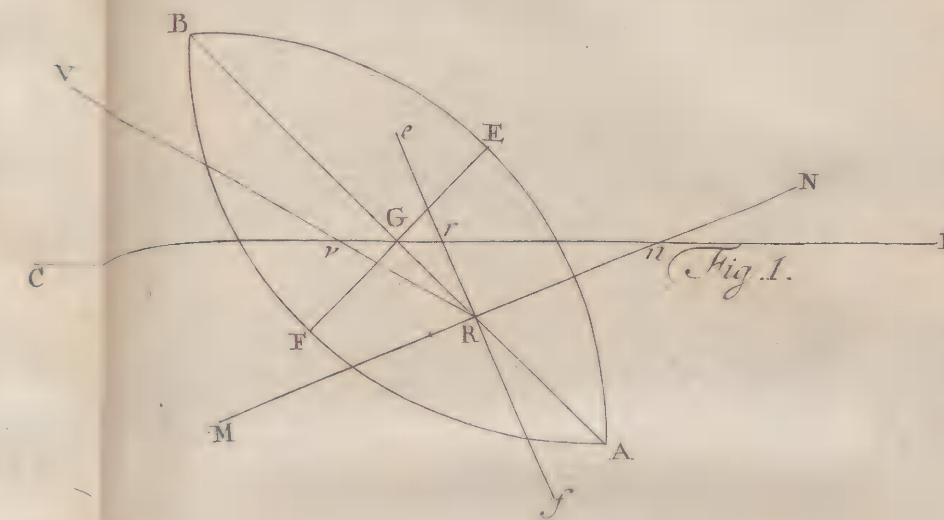


Fig. 1.

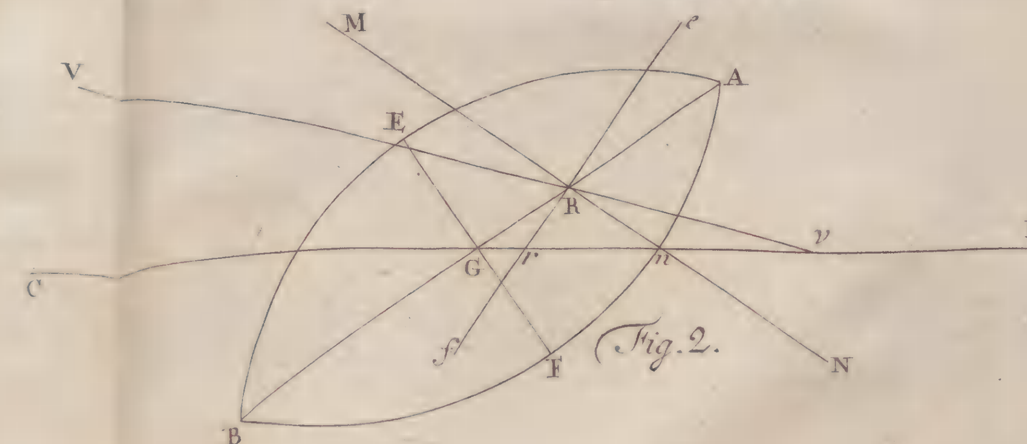


Fig. 2.

Fig. 1.

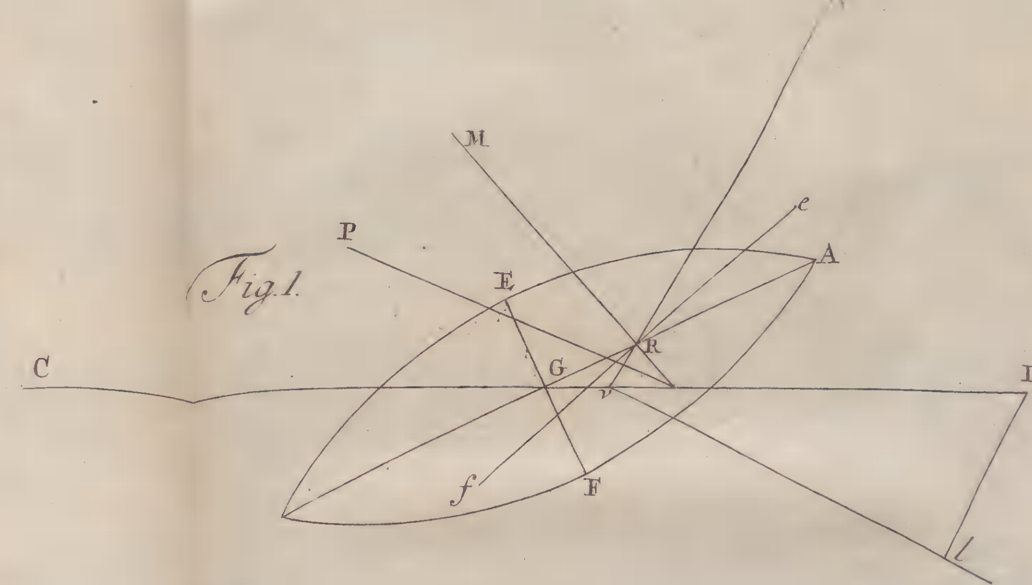
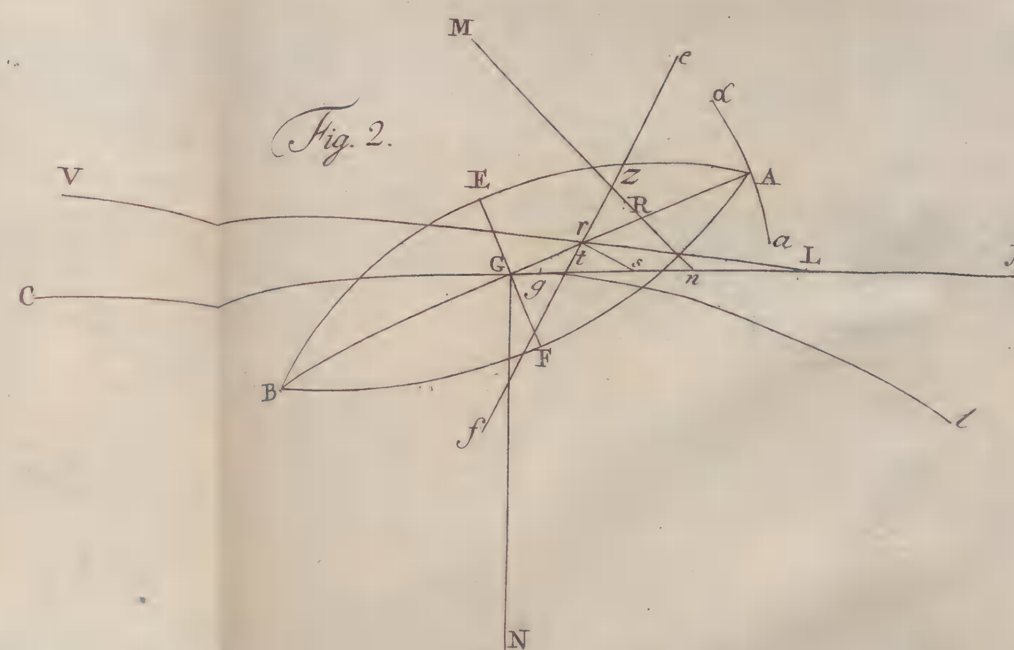


Fig. 2.



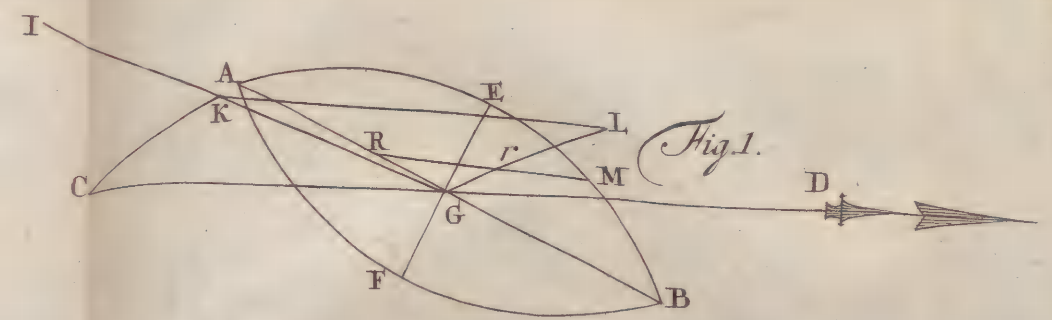


Fig. 1.

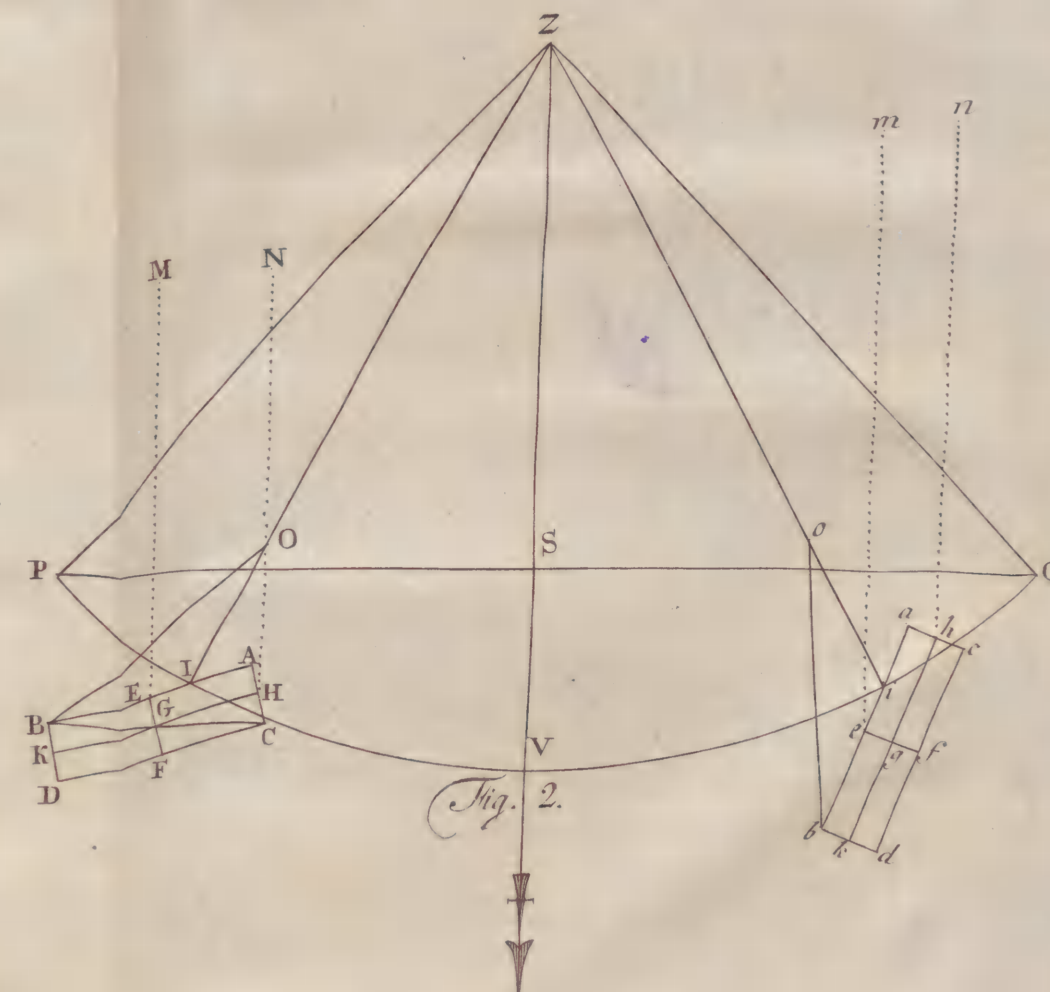


Fig. 2.

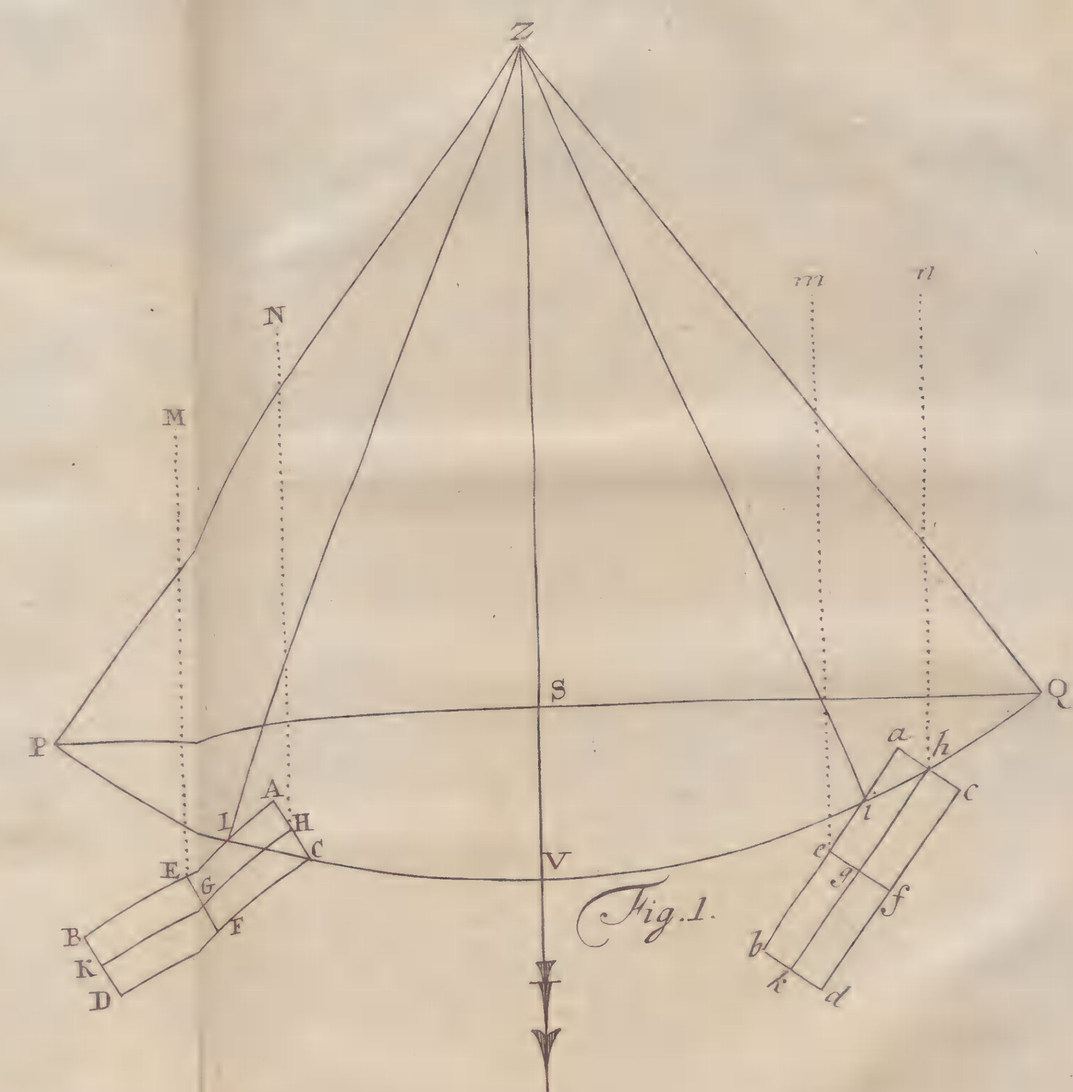


Fig. 1.

Part 1.

Tab. XXXVII.

EULERI
OPERA

SCIENTIA
NAVALIS

TOM II